

APUNTES DE MICROONDAS. CURSO 12-13.
TEMA 7:
RESONADORES EN MICROONDAS

1. INTRODUCCIÓN

Los circuitos resonantes son muy utilizados en ingeniería electrónica en una gran variedad de aplicaciones: filtros, osciladores, medidores de frecuencia y amplificadores sintonizados. Este tipo de aplicaciones se realizan desde muy baja frecuencia hasta muy alta frecuencia pasando por el rango de microondas. El principio de operación de los resonadores es básicamente el mismo independientemente de la banda de frecuencias en que se utilicen. Por ello se empezará el presente capítulo recordando la teoría básica de circuitos resonantes. Será la tecnología la que diferencie los circuitos resonantes en las bandas de baja frecuencia hasta las bandas de microondas y de muy alta frecuencia. Por ello, lo que es el grueso del presente capítulo irá enfocado a la realización y desarrollo de circuitos resonantes en microondas con distintas tecnologías: líneas de transmisión, guías de onda formando cavidades resonantes y guías dieléctricas constituyendo resonadores dieléctricos. Por último, y dado que un circuito resonante básicamente es un circuito capaz de almacenar energía eléctrica o magnética, habrá que estudiar cuál es la relación que tiene dicho circuito con el exterior y cómo se introduce y extrae energía del mismo. Así la última parte se titulará excitación de resonadores.

Para continuar con esta introducción se va a realizar un repaso de las topologías básicas de los circuitos resonantes: configuración serie, o a veces llamada circuito resonante, y la configuración paralela, a veces llamada circuito antiresonante. Son dos configuraciones duales donde la diferencia estriba en que en bornes de la configuración serie, en resonancia, se produce un mínimo del módulo de la impedancia, mínimo de voltaje y máximo de corriente; mientras, en la configuración paralelo, se produce un máximo de dicho módulo, máximo de voltaje y mínimo de corriente. También es conveniente justificar este recordatorio debido a que cualquier resonador de microondas puede modelarse como un circuito RLC serie o paralelo por lo que las propiedades básicas de estos serán totalmente aplicables a los primeros.

Circuito resonante serie

El circuito resonante serie RLC básico con elementos concentrados puede verse en la figura 1.a. En la figura 1.b se representa el módulo de la impedancia de entrada de dicho circuito en función de la frecuencia, que viene dada por:

$$Z_{in} = R_s + j\omega \cdot L_s - j \cdot \frac{1}{\omega \cdot C_s} \quad 7.1.$$

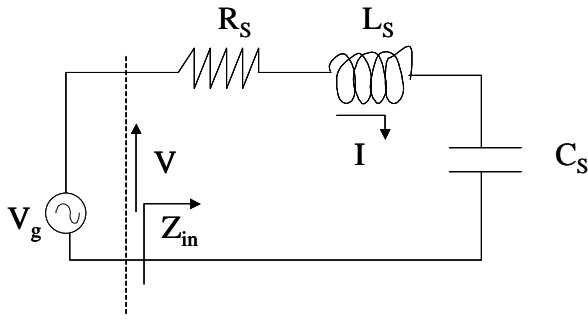


Figura 1.a: Circuito RLC serie

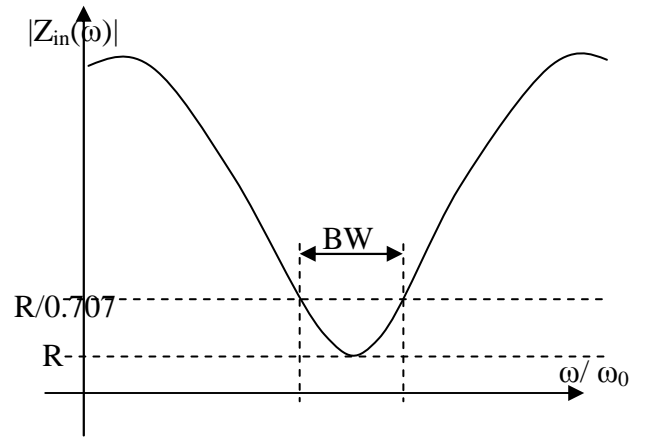


Figura 1.b: Módulo de la impedancia de entrada en función de la frecuencia

Y la potencia compleja proporcionada por el generador para este resonador serie viene dada por

$$P_{in} = \frac{1}{2} \cdot V \cdot I^* = \frac{1}{2} \cdot Z_{in} \cdot |I|^2 = \frac{1}{2} \cdot |I|^2 \cdot \left(R_s + j\omega \cdot L_s - j \cdot \frac{1}{\omega \cdot C_s} \right) = P_{loss} + 2j\omega \cdot (W_m - W_e) \quad 7.2.$$

En la anterior expresión se ha dividido la potencia introducida al resonador en tres términos: las pérdidas en el resonador (P_{loss}), energía magnética almacenada en la bobina (W_m) y energía eléctrica almacenada en el condensador (W_e). Dichas magnitudes pueden verse en la expresión 5.3.:

$$\begin{aligned} P_{loss} &= \frac{1}{2} \cdot R_s \cdot |I|^2 \\ W_m &= \frac{1}{4} \cdot |I|^2 \cdot L_s \\ W_e &= \frac{1}{4} \cdot |V_c|^2 \cdot C_s = \frac{1}{4} \cdot |I|^2 \cdot \frac{1}{\omega^2 \cdot C_s} \end{aligned} \quad 7.3.$$

En todas las expresiones anteriores el subíndice s se refiere al elemento correspondiente del circuito resonante serie. De 7.1.-7.3 se puede poner la impedancia de entrada del circuito resonante en función de las correspondientes potencias que entran en juego como:

$$Z_{in} = \frac{P_{loss} + 2j\omega \cdot (W_m - W_e)}{|I|^2 / 2} \quad 7.4.$$

Se dice que un circuito eléctrico resuena cuando la energía media almacenada por el campo eléctrico es igual a la energía media almacenada por el campo magnético. Si se aplica esta definición a la interpretación circuital de 7.4. resulta que la condición de resonancia es equivalente a que la impedancia de entrada a dicha frecuencia sea real (la reactancia sea nula) y, para este caso, coincida con la resistencia R_s de pérdidas del circuito.

Cuando se trabaja con resonadores dos son los parámetros fundamentales que hay que definir: pulsación o frecuencia de resonancia y el factor de calidad del circuito resonante. La pulsación de resonancia es aquella a la cual se cumple la condición de resonancia que $W_m = W_e$. De esta forma tomando 7.3. se obtiene:

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{L_s \cdot C_s}} \quad 7.5.$$

Otro parámetro fundamental a la hora de hablar de circuitos resonantes es el factor de calidad (llamado a veces factor de sobretensión) de dicho circuito. Está relacionado con las pérdidas que existen en el circuito (menores pérdidas supone un mayor factor de calidad) y se define como la relación existente entre la energía media almacenada en el circuito y la energía perdida por segundo. Da una idea del número de ciclos que duraría una oscilación libre hasta que se amortiguara un valor de e^{-1} . La definición puede indicarse en la expresión siguiente:

$$Q = \omega \cdot \frac{\text{energía media almacenada}}{\text{energía disipada por segundo}} = \omega \cdot \frac{W_m + W_e}{P_{loss}} \quad 7.6.$$

que a la pulsación de resonancia puede ponerse como

$$Q = \omega_o \cdot \frac{2 \cdot W_m}{P_{loss}} = \frac{\omega_o \cdot L_s}{R_s} = \frac{1}{\omega_o \cdot R_s \cdot C_s} \quad 7.7.$$

Dado que una de las características fundamentales de cualquier circuito es el margen de frecuencias para el cual puede considerarse que se mantienen sus propiedades, lo que es el ancho de banda, vamos a definir los parámetros anteriores (fundamentalmente la impedancia de entrada) en función de dicho margen de frecuencias, o más concretamente, en función de la separación respecto a la frecuencia de resonancia que se acaba de definir. Para ello se desarrollará la función impedancia de entrada en serie de Taylor en torno a la pulsación de resonancia y se despreciarán los términos de orden superior al primero ya que la suposición bajo la que se realiza el desarrollo es que dicha separación es pequeña. De esta forma la función impedancia de entrada resulta:

$$Z_{in}(\omega) = R_s + j\omega \cdot L_s - j \cdot \frac{1}{\omega \cdot C_s} = R_s + j \cdot f(\omega) \quad 7.8.$$

$$Z_{in}(\omega) = R_s + \left(j\omega_o \cdot L_s - j \cdot \frac{1}{\omega_o \cdot C_s} \right) + j \cdot (\omega - \omega_o) \cdot \left. \frac{df}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_o} + j \cdot \frac{(\omega - \omega_o)^2}{2!} \cdot \left. \frac{d^2f}{d\omega^2} \right|_{\omega=\omega_o} + \dots$$

$$Z_{in}(\omega) = R_s + j \cdot (\omega - \omega_o) \cdot 2L_s = R_s + j \cdot (\Delta\omega) \cdot 2L_s$$

La expresión anterior puede modificarse en función del factor de calidad del circuito como:

$$Z_{in}(\omega) = R_s + j \cdot (\Delta\omega) \cdot 2 \cdot \frac{R_s \cdot Q}{\omega_o} = R_s \cdot (1 + j \cdot Q \cdot \alpha) \quad 7.9.$$

donde el parámetro α se denomina desintonía del circuito ($\frac{(\Delta\omega) \cdot 2}{\omega_o} = \alpha$). Esta forma de representación de la impedancia de entrada es útil ya que resulta totalmente extrapolable a circuitos resonantes distribuidos con resonancia serie.

Por último se va a terminar con una pequeña regla nemotécnica que puede simplificar el trabajo en circuitos resonantes con pérdidas. Dicha regla consiste en una equivalencia en que el análisis para un circuito con pérdidas es el mismo que el de un circuito sin pérdidas sin más que sustituir la pulsación de resonancia ω_o por una pulsación de resonancia efectiva que incluye el factor de calidad del circuito y por lo tanto las pérdidas:

$$\omega_o \leftarrow \omega_o \cdot \left(1 + \frac{j}{2Q}\right) \quad 7.10.$$

Puede comprobarse que si se parte de un circuito resonante sin pérdidas en que la impedancia de entrada vendría dada por la siguiente expresión $Z_{in}(\omega) = j \cdot 2L_s \cdot (\omega - \omega_o)$ y se sustituye la pulsación de la expresión anterior que incluye las pérdidas gracias a la presencia del factor de calidad en dicha impedancia de entrada, se obtiene la expresión general 7.9. Esta regla es particularmente útil en circuitos distribuidos ya que la obtención del factor de calidad es relativamente factible con lo que partiendo de una expresión de un circuito sin pérdidas y con el conocimiento del correspondiente factor de calidad se puede generalizar fácilmente la expresión.

Queda por considerar dos últimos parámetros, derivados de los anteriores, en el análisis de las características del resonador: el ancho de banda y el factor de amortiguamiento. Consideraremos en primer lugar el factor de ancho de banda a potencia mitad del resonador. En la figura 1.b. se ha representado la variación del módulo de la impedancia de entrada en función de la frecuencia. Cuando se cumple que $|Z_{in}|^2 = 2R_s^2$ la potencia suministrada al circuito será la mitad que la suministrada en condición de resonancia. Utilizando la expresión 7.9 e identificando lo que allí se denominaba desintonía del circuito con el ancho de banda a 3dB resulta

$$\begin{aligned} |R_s \cdot (1 + j \cdot Q \cdot BW)|^2 &= 2 \cdot R_s^2 \\ BW &= \frac{1}{Q} \end{aligned} \quad 7.11.$$

donde BW es el ancho de banda relativo del circuito resonante.

Por último se puede definir el factor de amortiguamiento como un parámetro que mide la velocidad a que decaen las oscilaciones si el generador que las produce desaparece. Para hallar su valor se puede utilizar una técnica de perturbación análoga a la utilizada para hallar la constante de atenuación en guías de onda y líneas de transmisión. Para ello suponemos que la variación con el tiempo de la energía almacenada en el circuito es proporcional a dicha energía almacenada. De esta forma se puede escribir

$$\frac{dW}{dt} = -2\delta \cdot W$$

$$W = W_o \cdot e^{-2\delta \cdot t}$$

siendo W_o la energía media almacenada en el instante inicial, t_o . La variación de la energía almacenada por unidad de tiempo tiene que ser igual a la potencia almacenada por lo que si hacemos uso de la definición del factor de calidad dada en 7.6. podemos escribir

$$-\frac{dW}{dt} = 2\delta \cdot W = P_{loss} \quad 7.12.$$

$$\delta = \frac{P_{loss}}{2 \cdot W} = \frac{\omega_o \cdot P_{loss}}{\omega_o \cdot 2 \cdot W} = \frac{\omega_o}{2 \cdot Q}$$

Circuito resonante paralelo

La figura 2.a muestra el circuito básico RLC de elementos concentrados en paralelo. Como ya se dijo anteriormente la resonancia paralelo se caracteriza por presentar un máximo de módulo de impedancia. Esto supone que existe un máximo de tensión y un mínimo de corriente en bornes del circuito paralelo.

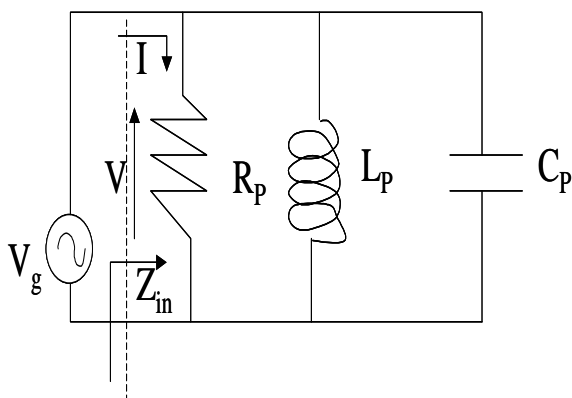


Figura 2.a: Circuito RLC paralelo

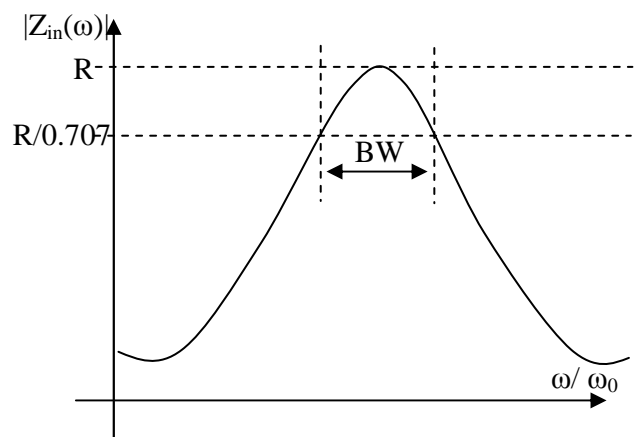


Figura 2.b: Módulo de la impedancia de entrada en función de la frecuencia

Siguiendo un análisis similar al del circuito serie (queda como ejercicio) se pueden poner las expresiones que aparecen en la siguiente tabla. Con el fin de comprobar que el circuito es

totalmente dual resonante serie se han repetido en dicha tabla las expresiones obtenidas en estudio de la resonancia serie.

Variable	Resonancia serie	Resonancia paralelo
Impedancia de entrada	$Z_{in} = R_s + j\omega \cdot L_s - j \cdot \frac{1}{\omega \cdot C_s}$ $Z_{in} = \frac{P_{loss} + 2j\omega \cdot (W_m - W_e)}{ I ^2 / 2}$	$Z_{in} = \left(\frac{1}{R_p} + \frac{1}{j\omega \cdot L_p} + j \cdot \omega \cdot C_p \right)^{-1}$ $Z_{in} = \frac{P_{loss} + 2j\omega \cdot (W_m - W_e)}{ I ^2 / 2}$
Potencia de entrada	$P_{in} = \frac{1}{2} \cdot I ^2 \cdot \left(R_s + j\omega \cdot L_s - j \cdot \frac{1}{\omega \cdot C_s} \right)$ $P_{in} = P_{loss} + 2j\omega \cdot (W_m - W_e)$	$P_{in} = \frac{1}{2} \cdot V ^2 \cdot \left(\frac{1}{R_p} - \frac{j}{\omega \cdot L_p} + j \cdot \omega \cdot C_p \right)$ $P_{in} = P_{loss} + 2j\omega \cdot (W_m - W_e)$
Potencia disipada	$P_{loss} = \frac{1}{2} \cdot R_s \cdot I ^2$	$P_{loss} = \frac{1}{2} \cdot \frac{ V ^2}{R_p}$
Energía eléctrica almacenada	$W_e = \frac{1}{4} \cdot V_c ^2 \cdot C_s = \frac{1}{4} \cdot I ^2 \cdot \frac{1}{\omega^2 \cdot C_s}$	$W_e = \frac{1}{4} \cdot V ^2 \cdot C_p$
Energía magnética almacenada	$W_m = \frac{1}{4} \cdot I ^2 \cdot L_s$	$W_e = \frac{1}{4} \cdot I_L ^2 \cdot L_p = \frac{1}{4} \cdot V ^2 \cdot \frac{1}{\omega^2 \cdot L_p}$
Pulsación de resonancia	$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{L_s \cdot C_s}}$	$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{L_p \cdot C_p}}$
Factor de calidad	$Q = \frac{\omega_o \cdot L_s}{R_s} = \frac{1}{\omega_o \cdot R_s \cdot C_s}$	$Q = \frac{\omega_o \cdot C_p}{G_p} = \frac{1}{\omega_o \cdot G_p \cdot L_p} = \omega_o \cdot C_p \cdot R_p$

De igual forma se puede poner una expresión de la impedancia de entrada en función del desplazamiento en frecuencia. Haciendo un razonamiento análogo al que se hacía en el anterior apartado resulta:

$$Z_{in}(\omega) = \frac{R}{1 + j \cdot (\omega - \omega_o) \cdot 2R \cdot C} = \frac{R}{1 + j \cdot \frac{(\Delta\omega)}{\omega_o} \cdot 2Q} \quad 7.13.$$

Los comentarios hechos para el cálculo de las características de un circuito con pérdidas a partir de las de un circuito sin pérdidas mediante la introducción de la frecuencia efectiva compleja de resonancia siguen siendo igualmente válidos en el circuito resonante paralelo. De igual forma también se mantiene la expresión del ancho de banda relativo obtenido en 7.11.

Factor de calidad cargado y descargado de un circuito

Todas las características de resonadores vistas hasta ahora han considerado el circuito totalmente aislado. Es evidente que la suposición anterior es totalmente falsa ya que el circuito resonante forma parte de otro circuito- amplificador, filtro, oscilador- con el que interacciona. La figura 3.a. muestra un ejemplo en donde el circuito resonante se encuentra “acoplado” a sendos circuitos exteriores.

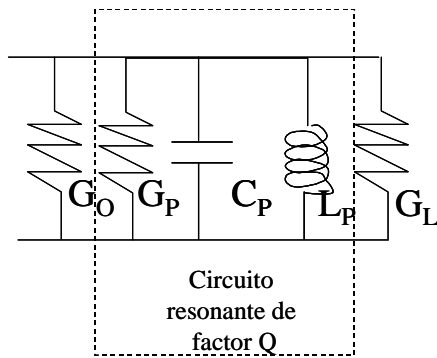


Figura 3.a.: Circuito resonante paralelo “acoplado” a dos circuitos exteriores.

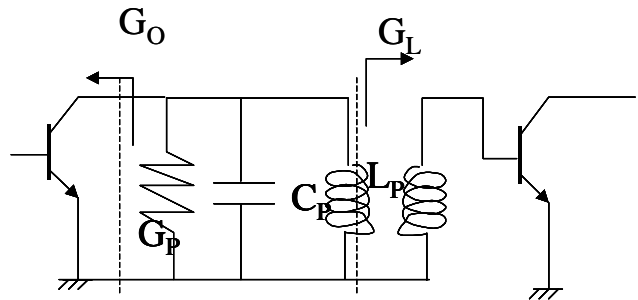


Figura 3.b.: Circuito resonante paralelo equivalente del 3.a

De acuerdo con la definición del factor de calidad y de su formulación correspondiente, el efecto de esta interacción es la disminución del factor de calidad del circuito completo en donde se encuentra incluido el resonador. El aspecto que presenta el nuevo circuito total es el que se muestra en la figura 3.b. donde se puede apreciar la existencia de un circuito resonante que tiene asociadas una carga de entrada y otra de salida. Por simplicidad se ha supuesto que dichas cargas son totalmente resistivas. Si se recuerda la definición general del factor de calidad dada en 7.6. puede desprenderse que la energía almacenada es única (ya que los efectos inductivos y capacitivos son comunes a los circuitos internos y externos al circuito resonante) por lo que la variación del factor de calidad irá relacionada con las pérdidas que están incluidas en el denominador de la expresión 7.6. Atendiendo al origen de dichas pérdidas, podemos distinguir tres formas del factor de calidad:

- Si las pérdidas consideradas son las debidas exclusivamente al resonador aislado tendremos el llamado factor de calidad en vacío que continuaremos denotando por Q .
- Si pudieran separarse las pérdidas debidas, exclusivamente, al acoplo del circuito resonante con el circuito exterior tendremos el factor de calidad exterior y que denotaremos por Q_{ex} . Tendremos tantos factores Q_{ex} cuantos acoplos tengamos con el resonador. Dependiendo de la forma de introducción y/o extracción de energía en el resonador se puede decir que el resonador funciona en reflexión o en transmisión. En el primer caso el resonador es un dipolo que recibe energía de su único terminal exterior; en el segundo caso el resonador es un cuadripolo que recibe

energía de un circuito y aporta energía a otro. La figura 3 muestra un resonador montado en transmisión; un ejemplo de esta realización podría ser un medidor de frecuencia (hecho en base a una cavidad resonante) colocado en medio de un banco de guías de forma que a la cavidad se acopla energía procedente del generador y lo transmite a la carga correspondiente. En el caso de resonador montado en transmisión existen dos factores de calidad externos asociados a cada una de las cargas de entrada y salida. En el caso de resonador montado en reflexión existe un único factor de calidad externo.

- Cuando las pérdidas consideradas son las globales de todo el circuito tendremos el llamado factor de calidad cargado Q_L . Tomando la expresión 7.7. o su dual para el circuito paralelo e incluyendo en el denominador de dicha expresión todas las pérdidas existentes en el circuito, se puede poner la resistencia R_s o la conductancia G_p en función de las pérdidas externas al circuito e internas al mismo. Utilizando los factores de calidad exteriores y aislados definidos en los párrafos anteriores se puede poner un factor de calidad cargado (Q_L) como indica 7.14. para el caso de un cuadripolo:

$$\frac{1}{Q_L} = \frac{1}{Q} + \frac{1}{Q_{ex1}} + \frac{1}{Q_{ex2}} \quad 7.14.$$

Si las resistencias exteriores de carga se denominan R_{ex1} y R_{ex2} y consideramos un circuito resonante serie de elementos concentrados se puede poner

$$\begin{aligned} Q_{ex1} &= \frac{\omega_o \cdot L_s}{R_{ex1}} = \frac{\omega_o \cdot L_s \cdot R_s}{R_{ex1} \cdot R_s} = Q \cdot \frac{R_s}{R_{ex1}}; \\ Q_{ex2} &= \frac{\omega_o \cdot L_s}{R_{ex2}} = \frac{\omega_o \cdot L_s \cdot R_s}{R_{ex2} \cdot R_s} = Q \cdot \frac{R_s}{R_{ex2}} \end{aligned} \quad 7.15.$$

De manera dual para el circuito resonante paralelo podría ponerse cualquiera de los factores de calidad exteriores como

$$Q_{ex1} = \frac{\omega_o \cdot C_p}{G_{ex1}} = \frac{\omega_o \cdot C_p \cdot G_p}{G_{ex1} \cdot G_p} = Q \cdot \frac{G_p}{G_{ex1}} = \frac{R_{ex1}}{\omega_o \cdot L_p} = Q \cdot \frac{R_{ex1}}{R_p} \quad 7.16.$$

De ambas expresiones puede verse que existe una relación entre el factor de calidad externo al circuito y el factor de calidad en vacío. Así definiremos el coeficiente de acoplo

$$s = \frac{Q}{Q_{ex}} = \frac{\text{Pérdidas en el circuito exterior}}{\text{Pérdidas en el resonador}} = \begin{cases} \text{serie: } \frac{\frac{1}{2} \cdot |I|^2 \cdot R_{ex}}{\frac{1}{2} \cdot |I|^2 \cdot R_s} = \frac{R_{ex}}{R_s} \\ \text{paralelo: } \frac{\frac{1}{2} \cdot |V|^2 \cdot G_{ex}}{\frac{1}{2} \cdot |V|^2 \cdot G_p} = \frac{G_{ex}}{G_p} = \frac{R_p}{R_{ex}} \end{cases} \quad 7.17.$$

El coeficiente anterior indica cuál es la influencia del circuito exterior sobre el circuito resonante y es un parámetro medible en los circuitos resonantes. En los ejemplos planteados dicho coeficiente tiene una expresión muy simple. Esto no ocurre en la mayor parte de los casos, sobre todo en microondas, por lo que se suele hacer es medir el coeficiente de acoplo directamente y asociar a dicho coeficiente, a partir de la expresión 7.17, una resistencia o una conductancia para asociar dicho circuito de microondas a otro más simple en serie o paralelo.

Si se normaliza cada una de las resistencias respecto a la resistencia exterior ($r_{ex}=1$) puede verse que el coeficiente de acoplamiento es el inverso del parámetro correspondiente de pérdidas del circuito resonante ($1/r_s$ para el circuito serie o $1/g_p$ para el circuito paralelo). De esta forma podemos considerar las situaciones siguientes dependiendo del valor de s :

- $s < 1$ ($Q < Q_{ext}$); el resonador se encuentra subacoplado del circuito exterior y el factor de calidad total del circuito se debe básicamente al circuito exterior. Si por simplicidad tomamos la resistencia exterior normalizada como se afirmaba en el párrafo anterior resultará que r_s en el circuito serie(g_p en el paralelo) será mayor que 1 por lo que en la carta de Smith el círculo correspondiente sería interior al unidad como puede verse en la figura 4.
- $s > 1$; el resonador se encuentra sobreacoplado o superacoplado del circuito exterior y el factor de calidad total del circuito se debe fundamentalmente al circuito interior. Haciendo el mismo proceso de normalización resulta que r_s en el circuito serie(g_p en el paralelo) será menor que 1 por lo que en la carta de Smith el círculo correspondiente sería exterior al unidad (figura 4).
- $s = 1$; en este caso se dice que el acoplamiento es crítico y el factor de calidad total se debe por igual al circuito externo que al interno. En este caso el valor de r_s en el circuito serie(g_p en el paralelo) es la unidad y coincide con la misma circunferencia de resistencia o conductancia en la correspondiente carta de Smith.

En los comentarios anteriores se ha hecho referencia al final a una relación que existe entre lo que son los coeficientes de acoplo y sus posibles representaciones en la carta de Smith. Como se verá posteriormente en el apartado de excitación de resonadores de aquí se derivará un método gráfico

simple para la obtención de cada uno de los factores de calidad de un resonador a partir de la medida de las cargas que entran en juego.

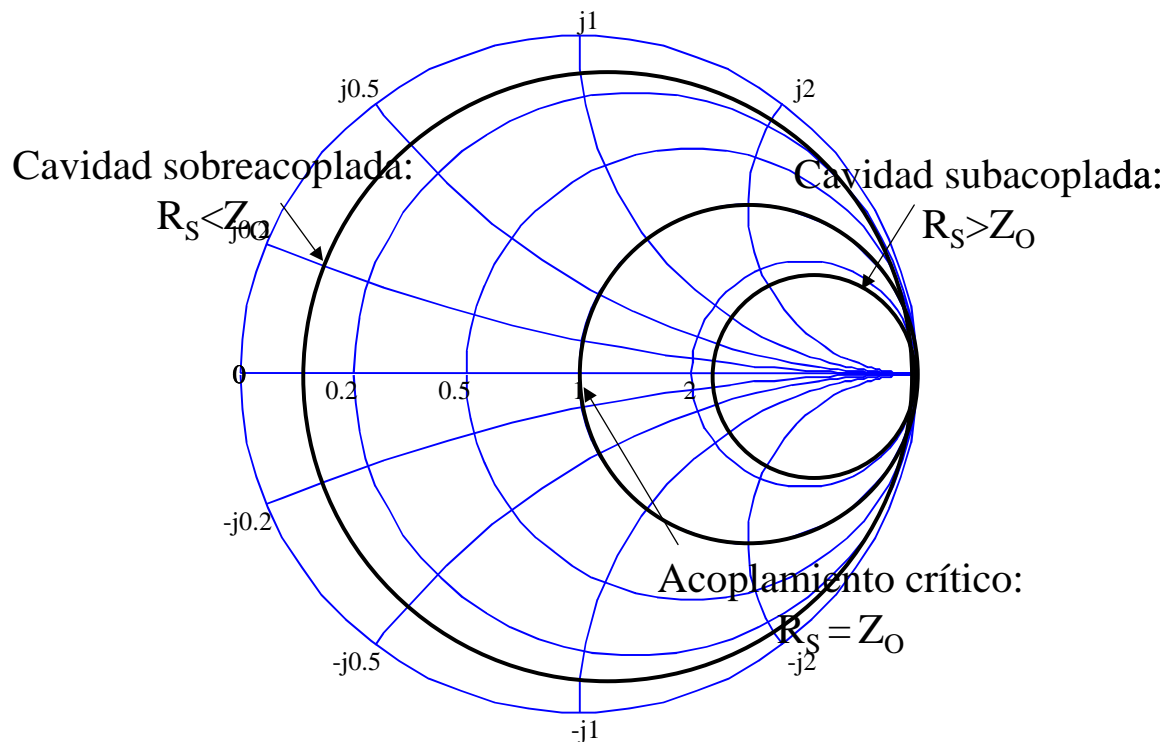


Figura 4: Carta de Smith mostrando el acoplamiento a un circuito RLC serie

2. CIRCUITOS RESONANTES EN ALTA FRECUENCIA

Los circuitos resonantes convencionales contruidos a partir de elementos concentrados no se utilizan, en general, a altas frecuencias debido a que su comportamiento eléctrico se degrada considerablemente. Entre las causas de esta degradación se pueden citar la aparición de resistencias parásitas asociadas a las bobinas y condensadores, de inductancias asociadas a los hilos de conexión y de capacidades entre los distintos tramos circuitales. Estos inconvenientes se pueden enumerar como:

- El aumento de la frecuencia de resonancia sólo se puede conseguir a expensas de reducir la correspondiente inductancia o capacitancia. En el caso de la bobina esto conduce a que cada vez sea menor el número de vueltas hasta llegar al caso límite a que un hilo sea suficiente. En este caso se pasaría del concepto de bobina al concepto de línea de transmisión.
- La razón anterior hace que los hilos de conexión al circuito sean en realidad secciones de línea de transmisión con sus inductancias y capacidades distribuidas que modifican la frecuencia de resonancia. Así, del circuito resonante original, las capacidades entre las espiras aumentan

considerablemente de forma que la bobina puede ser autoresonante, y lo mismo puede decirse del condensador con la autoinducción de sus terminales.

- Tanto la bobina como el condensador presentan pérdidas óhmicas que crecen con la frecuencia. En el caso de la bobina por efecto pelicular mientras que en la capacidad por aumento de las pérdidas dieléctricas.
- Al ir subiendo la frecuencia y al ser un circuito no cerrado, el efecto de la radiación se hace apreciable, aumentando las correspondientes pérdidas y disminuyendo el factor de calidad del circuito.

De los anteriores comentarios pueden sacarse una serie de conclusiones respecto a la construcción de circuitos resonantes en alta frecuencia.

- Una sección de línea de transmisión podrá resonar en determinadas condiciones de manera que se pasa del concepto de resonador de elementos concentrados al de resonador distribuido. Por extensión del concepto de línea al de guía, una guía de ondas también podrá resonar.
- Para disminuir las pérdidas se necesita pasar del concepto de hilo al de superficie con el fin de dar un mayor camino a las corrientes. Además para evitar las pérdidas por radiación el circuito deberá estar cerrado por paredes o superficies metálicas que confinen los campos en su interior. De esta forma se pasa al concepto de cavidad resonante.
- Los conceptos de resonancia en serie (máximo de corriente y mínimo de voltaje) o de resonancia paralelo (máximo de voltaje y mínimo de corriente) siguen siendo aplicables pero se puede extraer una conclusión adicional: ambas condiciones de resonancia se repiten, a partir de la condición inicial de resonancia serie o paralelo, para longitudes separadas por múltiplos de media longitud de onda. De esta forma cada cuarto de longitud de onda tendremos una resonancia serie o paralelo. De aquí se deriva que existirán infinitas frecuencias de resonancia.

Después de esta introducción se justifica que en los apartados siguientes se estudien estructuras capaces de confinar los campos en su interior y que pueden actuar como resonadores. Se comienza con resonadores formados por líneas de transmisión cortocircuitadas o en circuito abierto, se continúa con guías de onda rectangulares o cilíndricas que constituyen cavidades resonantes y se termina con estructuras dieléctricas (sin paredes metálicas) constituyendo resonadores dieléctricos.

3. LÍNEAS DE TRANSMISIÓN RESONANTES

En esta sección se estudiarán varias líneas de transmisión con distintas terminaciones (normalmente cortocircuito o circuito abierto) para formar los resonadores. Dado que debemos estudiar el factor de calidad de los circuitos resonantes siempre tendremos que aludir a circuitos con pérdidas.

La figura 5 muestra una línea de transmisión con el extremo en cortocircuito ideal con los siguientes parámetros primarios (R , L , C , G) y con impedancia característica Z_o y constante de propagación $\gamma = \alpha + j\beta$. El análisis que se seguirá para analizar esta estructura será comprobar primero su condición resonante para luego extraer el valor de los parámetros del circuito equivalente en constantes concentradas serie o paralelo. En la figura 5.b. puede apreciarse que si tomamos $l/2$ como longitud de la línea acabada en cortocircuito (con $l = \lambda/2$) tendremos una condición de máximo de voltaje y de mínimo de corriente lo que supone una resonancia paralelo mientras que si la longitud tomada es l se puede apreciar un mínimo de voltaje y máximo de corriente con lo que la condición de resonancia será serie.

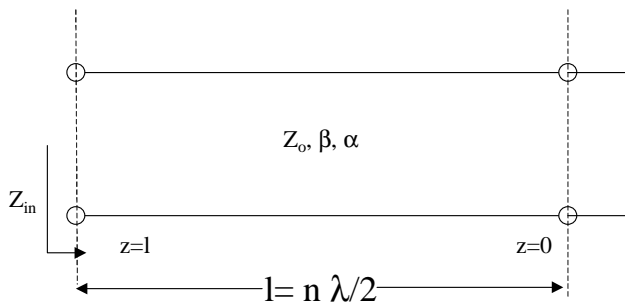


Figura 5.a: Resonador formado por una línea acabada en cortocircuito

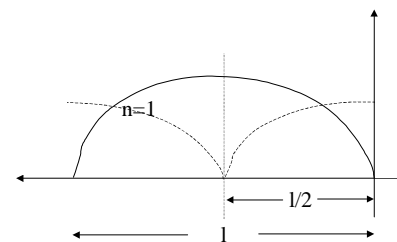


Figura 5.b: Distribución de voltajes para una línea de longitud $l = n\lambda/2$ acabada en cortocircuito

La comprobación de la condición de resonancia puede hacerse a partir de cualquiera de las dos definiciones de resonancia: bien que la parte imaginaria de la impedancia de entrada del circuito sea nula bien que la energía media eléctrica almacenada iguale a la magnética. A modo de ejemplo se harán los dos análisis.

Si consideramos una línea sin pérdidas (donde luego se introducirán las mismas a modo de perturbación como se indicó en la sección 1, expresión 7.10) las dos expresiones siguientes muestran el valor del voltaje y la corriente en cualquier punto de una línea de transmisión

$$\begin{aligned} V(z) &= V_o \cdot (e^{-j\beta \cdot z} + \Gamma \cdot e^{j\beta \cdot z}) \\ I(z) &= \frac{V_o}{Z_o} \cdot (e^{-j\beta \cdot z} - \Gamma \cdot e^{j\beta \cdot z}) \end{aligned} \quad 7.18.$$

Cuando la línea está acabada en cortocircuito el coeficiente de reflexión es -1 con lo que las anteriores expresiones se transforman en

$$\begin{aligned} V(z) &= V_o \cdot (e^{-j\beta \cdot z} - e^{j\beta \cdot z}) = -2j \cdot V_o \cdot \sin \beta \cdot z \\ I(z) &= \frac{V_o}{Z_o} \cdot (e^{-j\beta \cdot z} + e^{j\beta \cdot z}) = \frac{2V_o}{Z_o} \cdot \cos \beta \cdot z \end{aligned} \quad 7.19.$$

A partir de esas expresiones podemos calcular el valor de la energía magnética y eléctrica almacenada en la línea como:

$$\begin{aligned} W_H &= \frac{1}{4} \cdot L \cdot \int_0^l I(z) \cdot I^*(z) dz = \frac{I_o^2 \cdot L \cdot l}{2} \cdot \left[1 + \frac{\sin(2\beta \cdot l)}{2\beta \cdot l} \right] \\ W_E &= \frac{1}{4} \cdot C \cdot \int_0^l V(z) \cdot V^*(z) dz = \frac{I_o^2 \cdot L \cdot l}{2} \cdot \left[1 - \frac{\sin(2\beta \cdot l)}{2\beta \cdot l} \right] \\ P_{loss} &= \frac{1}{2} \cdot R \cdot \int_0^l I(z) \cdot I^*(z) dz + \frac{1}{2} \cdot G \cdot \int_0^l V(z) \cdot V^*(z) dz = I_o^2 \cdot l \cdot \left[(R + G \cdot Z_o^2) + \frac{\sin(2\beta \cdot l)}{2\beta \cdot l} \cdot (R - G \cdot Z_o^2) \right] \end{aligned} \quad 7.20.$$

La condición de resonancia se obtiene cuando $W_H = W_E$ lo que supone que

$$\sin(2\beta \cdot l) = 0 \Rightarrow l = n \cdot \frac{\lambda}{4}; n = 1, 2, 3, \dots \quad 7.21.$$

De donde se obtienen infinitas frecuencias de resonancia a diferencia de lo que se obtenía en un resonador con elementos concentrados. El valor de las distintas frecuencias de resonancia viene dado como:

$$l = n \cdot \frac{\lambda}{4} = n \cdot \frac{v_p}{4f_{on}} = n \cdot \frac{c}{4f_{on} \cdot \sqrt{\epsilon_{eff}}}; \Rightarrow f_{on} = n \cdot \frac{c}{4 \cdot l \cdot \sqrt{\epsilon_{eff}}} \quad 7.22.$$

La expresión anterior en el caso de tomar estructuras de línea que soportan modos TEM puros cambiaría la constante dieléctrica efectiva por la relativa.

La obtención de estructuras resonantes en base a líneas de transmisión acabadas en cortocircuito con longitudes de línea múltiplos de cuarto de la longitud de onda es extrapolable a líneas acabadas en circuito abierto. Formado el resonador queda por ver si la resonancia que se obtiene es serie o paralelo. Esto dependerá de si la longitud de la línea es múltiplo par o impar de $\lambda/4$. Así podemos ver que para $\lambda/4$ (y todos sus múltiplos impares) en bornas de la línea de transmisión tenemos un máximo de voltaje y un mínimo de corriente lo que supone un máximo del módulo de la impedancia y por tanto un circuito resonante paralelo. En el caso de tener múltiplos pares de $\lambda/4$ (múltiplos de $\lambda/2$) supone un mínimo de voltaje y un máximo de corriente (mínimo del módulo de

impedancia) y un circuito resonante paralelo. Para el caso de una línea en circuito abierto la situación es la dual.

Resonancia serie

La figura 6.a. muestra una línea de transmisión de bajas pérdidas acabada en cortocircuito de longitud $\lambda/2$. Como puede verse la condición de mínimo de voltaje en sus bornes implica una resonancia serie. De esta forma el circuito equivalente en constantes concentradas del que queremos hallar sus parámetros resulta como muestra la figura 6.b.

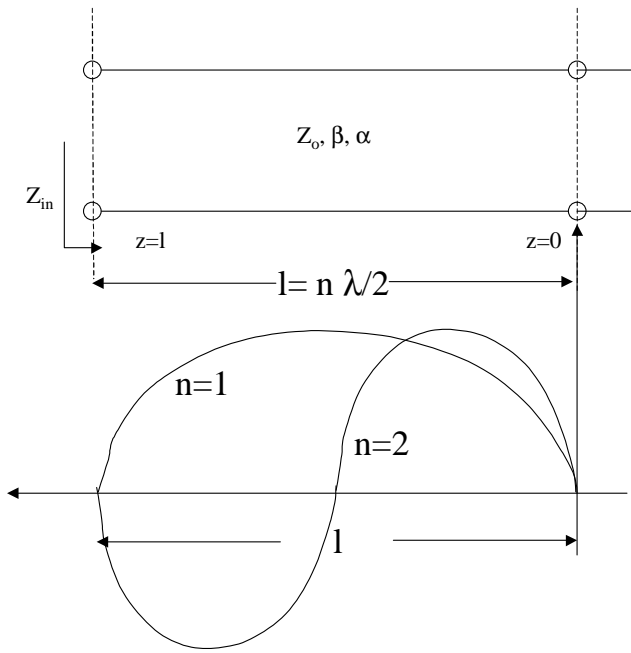


Figura 6.a: Resonador formado por una línea múltiplo de $\lambda/2$ acabada en cortocircuito

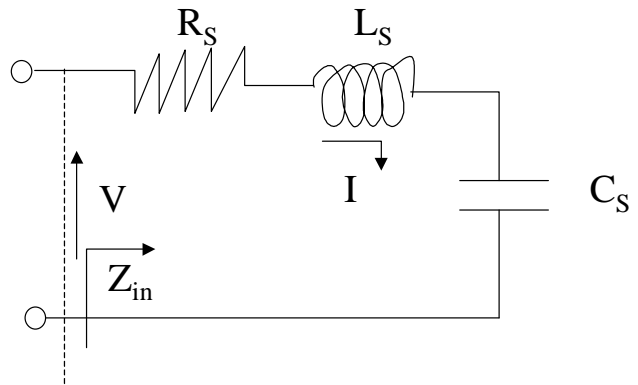


Figura 6.b: Circuito de constantes concentradas para un resonador de longitud $l = n\lambda/2$ acabada en cortocircuito

La impedancia de entrada puede ponerse como:

$$Z_{in} = Z_o \frac{Z_L + Z_o \cdot \tanh(\gamma \cdot l)}{Z_o + Z_L \cdot \tanh(\gamma \cdot l)} \Big|_{Z_L=0} = Z_o \cdot \tanh((\alpha + j\beta) \cdot l) = Z_o \frac{\tanh(\alpha \cdot l) + j \cdot \tanh(\beta \cdot l)}{1 + j \cdot \tanh(\alpha \cdot l) \cdot \tanh(\beta \cdot l)} \quad 7.23.$$

Considerando que hay bajas pérdidas se puede hacer $\tanh(\alpha \cdot l) \cong \alpha \cdot l$; si se hace un análisis en torno

a la frecuencia de resonancia se puede poner $\beta \cdot l = \frac{\omega \cdot l}{v_p} = \frac{\omega_o \cdot l}{v_p} + \frac{\Delta\omega \cdot l}{v_p} \Big|_{l=\lambda/2} = \pi + \frac{\Delta\omega \cdot \pi}{\omega_o}$. Si se

introduce esta expresión en el término correspondiente a la constante de propagación resulta

$$\tanh(\beta \cdot l) = \tanh\left(\pi + \frac{\Delta\omega \cdot \pi}{\omega_o}\right) = \tanh\left(\frac{\Delta\omega \cdot \pi}{\omega_o}\right) \approx \frac{\Delta\omega \cdot \pi}{\omega_o} \quad 7.24.$$

con lo que la impedancia de entrada queda

$$Z_{in} \approx Z_o \frac{\alpha \cdot l + j \cdot \left(\Delta\omega \cdot \pi / \omega_o \right)}{1 + j \cdot \alpha \cdot l \cdot \left(\Delta\omega \cdot \pi / \omega_o \right)} \bigg|_{\alpha \cdot l \cdot \left(\Delta\omega / \omega_o \right) \ll 1} \approx Z_o \cdot \left(\alpha \cdot l + j \cdot \Delta\omega \cdot \pi / \omega_o \right) \quad 7.25.$$

Si se compara esta expresión con la de la resonancia serie obtenida en 7.8-9 podemos obtener los valores del circuito equivalente RLC de constantes concentradas

$$R_s = Z_o \cdot \alpha \cdot l; \quad L_s = \frac{Z_o \cdot \pi}{2\omega_o} \quad 7.26.$$

$$Q = \frac{\omega_o \cdot L}{R} = \frac{\pi}{2\alpha \cdot l} \bigg|_{\text{resonancia}} = \frac{\beta}{2\alpha}$$

De la ecuación anterior puede extraerse una importante conclusión como es que el factor de calidad es independiente de la longitud de la línea y, si las pérdidas dieléctricas son despreciables, es proporcional a la raíz cuadrada de la frecuencia (en este caso las pérdidas consideradas en la evaluación del factor de calidad serían las pérdidas en el conductor que son proporcionales a la resistividad superficial del metal que a su vez depende directamente de la raíz cuadrada de la frecuencia). Los valores típicos del factor de calidad oscilan entre unas centenas para línea microstrip y varios miles para cable coaxial dependiendo del dieléctrico que rellene el cable.

Todo el proceso desarrollado anteriormente para una línea de transmisión de longitud $\lambda/2$ acabada en cortocircuito es análogo al de una línea de transmisión de longitud $\lambda/4$ con su terminación en circuito abierto. Es también un caso de resonancia serie y las expresiones del factor de calidad y del circuito equivalente son las mismas. Ambos tipos de configuraciones son importantes en la construcción de resonadores en tecnología microstrip.

Ejemplo: Se ha construido un resonador en $\lambda/2$ con un cable coaxial, con un radio interior de 1 mm y un radio exterior de 4 mm. Si la frecuencia de resonancia es 5 GHz, compare el factor de calidad para un dieléctrico interior de aire o de Teflon (con características eléctrica $\epsilon_r=2.08$ y $\text{tg } \delta=0.0004$)

Se demostró anteriormente que el factor de calidad depende exclusivamente de las características eléctricas del material que constituye la línea por medio de sus constantes de atenuación y de fase. La constante de atenuación será la suma de las constantes asociadas al dieléctrico y al conductor.

Pérdidas asociadas al conductor en un coaxial:

$$\alpha_c = \frac{R_s}{2\eta \ln(b/a)} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} R_s = \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu_o}{2\sigma}} \\ a \equiv \text{radio interior} \\ b \equiv \text{radio exterior} \\ \eta \equiv \text{impedancia intrínseca del medio} = 377\Omega \\ \sigma \equiv \text{conductividad (del cobre)} = 5.813 \times 10^7 \\ \mu_o \equiv \text{permeabilidad de espacio libre} = 4\pi \times 10^{-7} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{\text{caire}} = 0.022 \text{ Np/m} \\ \alpha_{\text{cTEFLON}} = 0.032 \text{ Np/m} \end{array} \right.$$

Pérdidas asociadas al dieléctrico

$$\alpha_d = \frac{\omega \cdot \sqrt{\mu\epsilon'}}{2} \cdot \frac{\epsilon''}{\epsilon'} = \frac{\omega \cdot \sqrt{\mu\epsilon'}}{2} \cdot \text{tg } \delta = \begin{cases} \alpha_{\text{dAIRE}} = 0 \\ \alpha_{\text{dTEFLON}} = 0.030 \text{ Np/m} \end{cases}$$

De acuerdo con los valores obtenidos y como β_o es 104.7 resulta $Q_{\text{aire}}=2380$; $Q_{\text{TEFLON}}=1218$.

Resonancia paralelo

La resonancia paralelo se conseguirá cuando exista un máximo del módulo de la impedancia. Esto supone que en bornes del circuito resonante existirá un máximo de voltaje y un mínimo de corriente. Si tomamos la línea de transmisión terminada en cortocircuito la anterior situación ocurre cuando su longitud es $\lambda/4$. Siguiendo un proceso totalmente análogo al del anterior circuito se puede poner la impedancia de entrada como:

$$Z_{in} = Z_o \frac{\text{tgh}(\alpha \cdot l) + j \cdot \text{tg}(\beta \cdot l)}{1 + j \cdot \text{tgh}(\alpha \cdot l) \cdot \text{tg}(\beta \cdot l)} = Z_o \frac{1 - j \cdot \text{tgh}(\alpha \cdot l) \cdot \cot(\beta \cdot l)}{\text{tgh}(\alpha \cdot l) - j \cdot \cot(\beta \cdot l)} \quad 7.27.$$

Considerando nuevamente que hay bajas pérdidas se puede hacer $\text{tgh}(\alpha \cdot l) \cong \alpha \cdot l$; un análisis en

torno a la frecuencia de resonancia puede poner $\beta \cdot l = \frac{\omega \cdot l}{v_p} = \frac{\omega_o \cdot l}{v_p} + \frac{\Delta\omega \cdot l}{v_p} \Big|_{l=\lambda/4} = \frac{\pi}{2} + \frac{\Delta\omega \cdot \pi}{2\omega_o}$. Si se

introduce esta expresión en el término correspondiente a la constante de propagación resulta

$$\cot(\beta \cdot l) = \cot\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\Delta\omega \cdot \pi}{2\omega_o}\right) = -\text{tg}\left(\frac{\Delta\omega \cdot \pi}{2\omega_o}\right) \approx -\frac{\Delta\omega \cdot \pi}{2\omega_o} \quad 7.28.$$

con lo que la impedancia de entrada queda

$$Z_{in} \approx Z_o \frac{1 + j\alpha \cdot l \cdot \left(\frac{\Delta\omega \cdot \pi}{2\omega_o}\right)}{\alpha \cdot l + j\pi \left(\frac{\Delta\omega}{2\omega_o}\right)} \Big|_{\alpha \cdot l \cdot \left(\frac{\Delta\omega}{\omega_o}\right) \ll 1} \approx \frac{Z_o}{\left(\alpha \cdot l + j \cdot \frac{\Delta\omega \cdot \pi}{2\omega_o}\right)} \quad 7.29.$$

Si se compara esta expresión con la de la resonancia paralelo mostrada en la tabla I podemos obtener los valores del circuito equivalente RLC de constantes concentradas

$$R_p = \frac{Z_o}{\alpha \cdot l} \Rightarrow G_p = Y_o \cdot \alpha \cdot l; C_p = \frac{Y_o \cdot \pi}{4\omega_o} \quad 7.30.$$

$$Q = \frac{\omega_o \cdot C_p}{G_p} = \frac{\pi}{4\alpha \cdot l} \Big|_{\text{resonancia}} = \frac{\beta}{2\alpha}$$

Como puede apreciarse, las expresiones 7.30 son totalmente duales de las 7.26 con la única diferencia que en la obtención de capacidad paralelo aparece un factor 4 en lugar del 2 que se obtenía en la inductancia serie; esta diferencia no procede más que de la longitud considerada en el resonador serie era de $\lambda/2$ frente a $\lambda/4$ que se ha considerado aquí. No obstante, se llega a las mismas conclusiones anteriores ya que factor de calidad es independiente de la longitud de la línea y, si las pérdidas dieléctricas son despreciables, es proporcional a la raíz cuadrada de la frecuencia.

Un resonador utilizado ampliamente en circuitos con línea microstrip es el resonador de longitud $\lambda/2$ y acabado en circuito abierto. Dicha estructura presenta una resonancia paralelo como la descrita en este apartado, con la única diferencia de acuerdo con la expresión de la obtención de la frecuencia de resonancia 7.22 que el valor de n es 2. En este caso las expresiones son exactamente las mismas que 7.30 salvo que la capacidad equivalente del circuito paralelo en función de la pulsación de resonancia es $C_p = \frac{Y_o \cdot \pi}{2\omega_o}$.

Ejemplo: Se considera un resonador de media longitud de onda en tecnología microstrip acabado en circuito abierto. El espesor del substrato es 1.59 mm, con $\epsilon_r=2.2$ y $\text{tg } \delta=0.001$). Las tiras conductoras son de cobre. Determine la longitud de la línea para que exista una resonancia a 5 GHz así como el factor de calidad del resonador. Justifique las aproximaciones realizadas.

Acudiendo a gráficas o a expresiones que determinan la anchura de la línea microstrip y la permitividad efectiva se puede obtener:

$$W=0.49 \text{ cm}$$

$$\epsilon_{\text{eff}}=1.87$$

Con esto calculamos la longitud de la línea resonante como: $l = \frac{v_p}{2f} = 2.19 \text{ cm}$

La constante de propagación vale: $\beta = \frac{2\pi f}{v_p} = 143.2 \text{ rad/m}$

Las pérdidas en los conductores y en el dieléctrico para el caso de una línea microstrip valen

$$\text{Pérdidas en el dieléctrico: } \alpha_d = \frac{\beta_o \cdot \epsilon_r \cdot (\epsilon_{\text{eff}} - 1)}{2\sqrt{\epsilon_{\text{eff}}} \cdot (\epsilon_r - 1)} \cdot \text{tg } \delta = 0.061 \text{ Np/m}$$

$$\text{Pérdidas en los conductores: } \alpha_c = \frac{R_s}{Z_o \cdot W} = 0.075 \text{ Np/m}$$

De donde el factor de calidad es: $Q=526$.

Debe observarse que en el caso de que ambos extremos de la línea estén en circuito abierto o cortocircuito no son posibles las resonancias más que con longitudes de onda múltiplos de media longitud de onda con el fin de que se cumplan simultáneamente las condiciones de contorno en ambos extremos. El análisis y los resultados serán los mismos y el circuito equivalente a emplear dependerá de la localización del punto en que se tomen las condiciones de resonancia. Una de las condiciones de resonancia en este caso es que la suma de las impedancias vistas desde un punto cualquiera del circuito hacia la derecha y hacia la izquierda es nula. Esto es:

$$Z_{in}^d(x) + Z_{in}^i(x) = 0 \quad 7.31.$$

Líneas resonantes acortadas

Cuando las frecuencias en que se utiliza un resonador de línea son bajas la longitud del circuito puede resultar excesiva. En este caso parece que la construcción de resonadores sería la utilización un resonador con elementos concentrados pero disminuiría demasiado el factor de calidad. Existe otra opción híbrida de las anteriores como sería la utilización de un tramo de línea pero terminado en condensadores con alto factor de calidad. De esta forma se reduce la longitud de línea necesaria para la construcción del resonador pero se encarece el circuito debido a la necesidad de llevar elementos concentrados con un alto factor de calidad. Estos condensadores podrían ser variables y conseguir un sintonizador variable del resonador. El circuito se muestra en la figura 7 así como su equivalente en la carta de Smith. Observando el efecto de la capacidad en la carta de Smith se ve que la longitud de línea a que está conectada reduce su distancia para conseguir la resonancia.

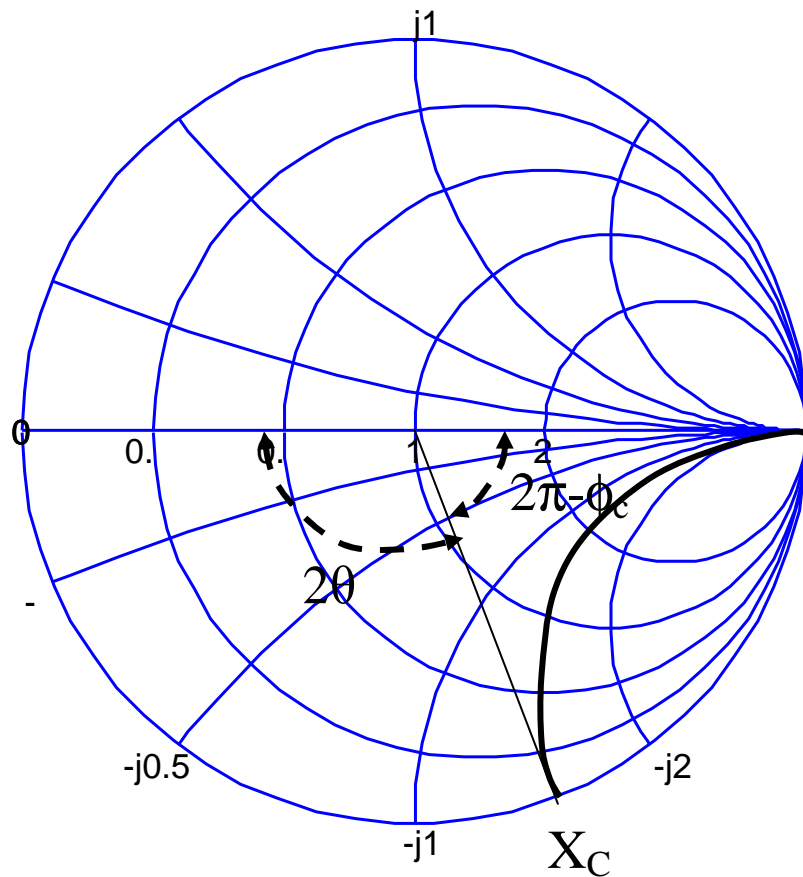
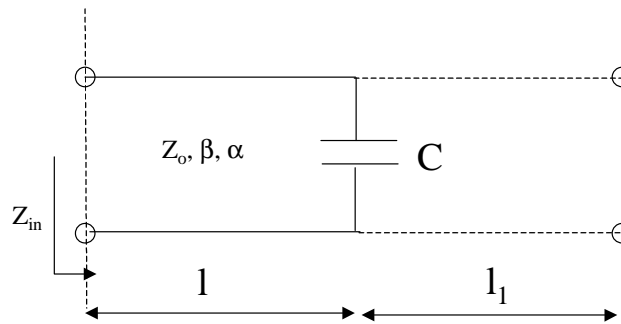


Figura 7: Circuito resonante en base a una línea de transmisión acortada.

El caso dual del estudiado sería la conexión de una bobina que equivale a una línea cortocircuitada de longitud menor de $\lambda/4$ pudiendo lograrse un resonador en paralelo. Este caso, sin embargo, no es habitual debido a que el factor de calidad de la bobina es bajo por lo que la consecución de un resonador de alto factor de calidad es complicada.

4. CAVIDADES RESONANTES

Cuando se trabaja a frecuencias muy elevadas en donde se requieren factores de calidad muy altos, se utilizan guías de onda resonantes constituyendo cavidades resonantes con las que se puede conseguir factores de calidad de decenas de miles. Puede definirse una cavidad resonante como un

volumen cerrado por paredes conductoras metálicas dentro del cual se introduce y extrae energía electromagnética por diversos métodos. Entre estos métodos de excitación se puede considerar sondas eléctricas, sondas magnéticas e iris o aperturas. También se supondrá que las paredes conductoras tienen una conductividad finita dando lugar a una potencia perdida por lo que van a ser equivalentes a una determinada resistencia efectiva.

Dado que se produce radiación cuando una guía de onda está terminada en circuito abierto, lo habitual al formar resonadores con guía de onda es cortocircuitar ambos extremos, de modo que obtenemos una caja cerrada o cavidad de forma que la introducción o extracción de la energía será por medio de sondas o de aperturas. La energía eléctrica y magnética se almacena en el interior de la cavidad, y la potencia puede ser disipada tanto en las paredes metálicas de la cavidad como en el dieléctrico que rellena el interior de la cavidad.

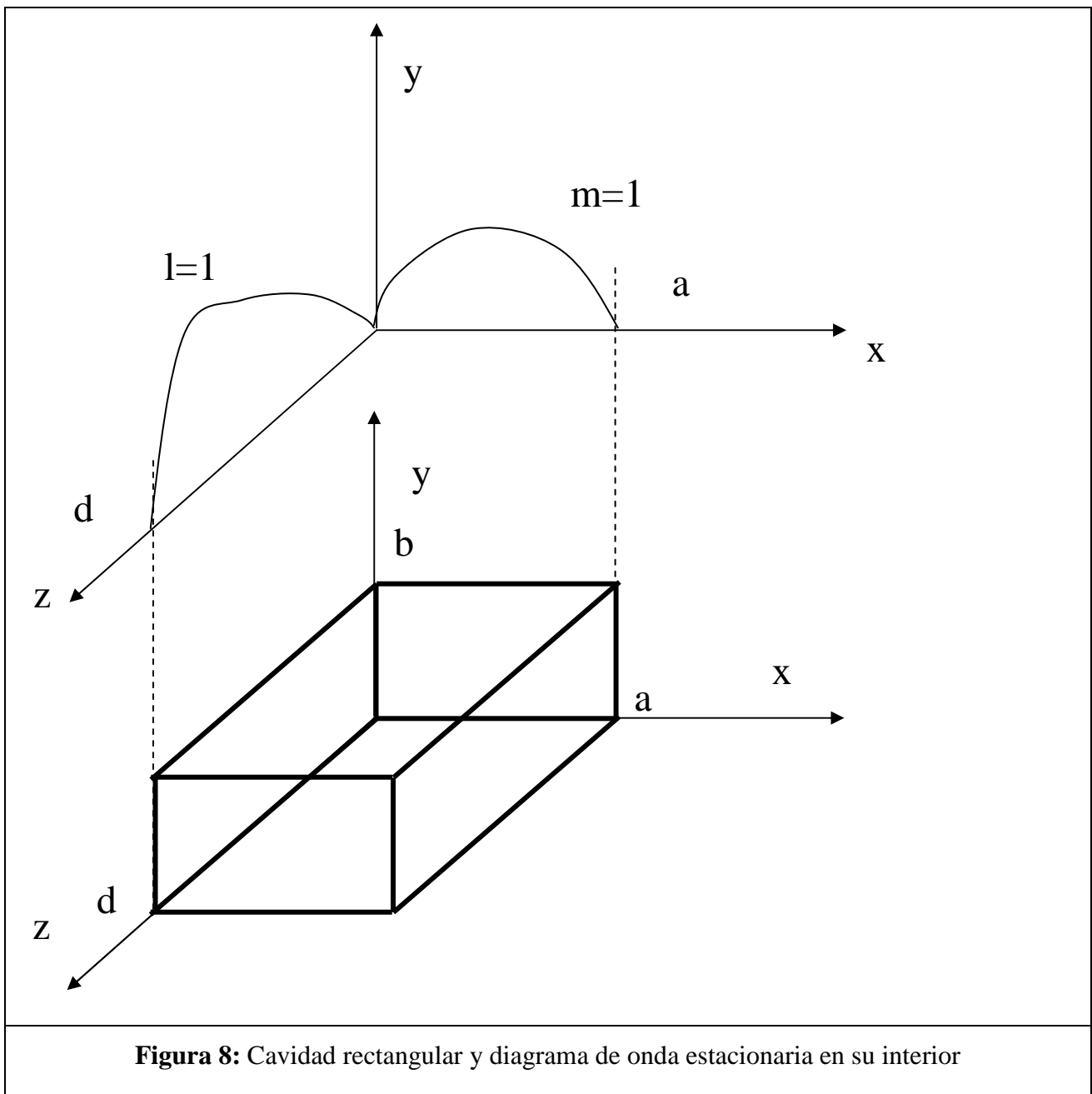
La forma más usual de las cavidades resonantes es rectangular o cilíndrica: formadas a base de guías de onda rectangulares o circulares. Existen también cavidades esféricas y cavidades basadas en coaxial (esta última resonará normalmente en el modo más bajo, es decir un TEM, aunque también puede hacerlo en modos superiores).

El análisis y las conclusiones de las cavidades resonantes son similares a las de las líneas de transmisión. No obstante, el estudio matemático y las conclusiones de las mismas presentan una complicación sensiblemente superior al de las líneas de transmisión. Esto se debe a varias razones:

- En las líneas de transmisión se supone un modo de propagación TEM cuya constante de fase es lineal con la frecuencia. En la determinación de la frecuencia de resonancia, por tanto, interviene una sola dimensión.
- En el caso de las cavidades resonantes hay infinitos modos de propagación dependientes de las dimensiones transversales de la guía. De esta forma cada modo de propagación da lugar a infinitos modos resonantes que dependen de dos o tres dimensiones. Esta relación de dimensiones es, además, más compleja ya que la fase no es función lineal de la frecuencia.
- En guías de onda no puede hablarse de circuitos equivalentes sencillos ya que no puede definirse en cada punto del circuito de forma unívoca un voltaje y una corriente.
- El estudio de las cavidades podrá abordarse resolviendo las ecuaciones de Maxwell en el interior de la cavidad y aplicando las condiciones impuestas por las paredes metálicas en las tres dimensiones. Dado que ya se resolvió el problema de las guías de onda, supondremos que el modo ha quedado definido por las dimensiones de la propia guía en la que se impone una condición de cierre metálico que crea una onda estacionaria pura. Se supondrán campos ideales y se introducirán las resistencias en las paredes para determinar las pérdidas y con ellas el factor de calidad.

Cavidad resonante de guía de onda rectangular

La figura 9 muestra una cavidad rectangular constituida por una sección de guía de longitud d cerrada por un cortocircuito en sus extremos y con dimensiones transversales a y b . La condición de resonancia que la energía magnética almacenada sea igual a la energía eléctrica hace que la longitud de la guía sea un múltiplo de un cuarto de la longitud de onda. No obstante, como la condición de cierre debe repetirse en los dos extremos de la cavidad, resulta que la dimensión de la cavidad debe ser múltiplo de media longitud de onda. En primer lugar desarrollaremos las frecuencias resonantes para los modos generales TE o TM, y entonces derivaremos la expresión para la Q de un modo TE_{101} .



Consiste en una longitud d de guía de onda rectangular cortocircuitada en ambos extremos ($z = 0, d$). En primer lugar determinaremos las frecuencias de resonancia de esta cavidad suponiendo

que no existen pérdidas, para posteriormente hallar el factor de calidad de la estructura. Para ello, haremos uso de las formas conocidas de los campos dentro de una guía de onda rectangular para un modo TE_{mn} o TM_{mn} . Así el campo eléctrico en el plano transversal puede venir dado como:

$$\bar{E}_t(x, y, z) = \bar{e}(x, y) \left[A^+ e^{-j\beta_{mn}z} + A^- e^{j\beta_{mn}z} \right] \quad 7.32.$$

donde $\bar{e}(x, y)$ es la variación transversal del modo, y A^+ , A^- son amplitudes arbitrarias de las ondas progresivas y regresivas en ambos sentidos. La constante de propagación del modo m, n para el correspondiente modo TE o TM es:

$$\beta_{mn} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2} \quad 7.33.$$

donde $k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$, y μ, ϵ son la permeabilidad y permitividad respectivamente del material que rellena la cavidad.

Cuando se cierra la guía por una superficie metálica en el plano $z=0$, de la ecuación 7.33 resulta que $\bar{E}_t = 0$. De esta forma obtenemos que $A^+ = -A^-$, lo cual era de esperar, por la reflexión en paredes conductoras perfectas. Esta condición ($\bar{E}_t = 0$) tiene que mantenerse en $z = d$ lo que nos lleva a la condición:

$$\bar{E}_t(x, y, d) = -\bar{e}(x, y) A^+ 2j \sin \beta_{mn} d = 0 \quad 7.34.$$

La solución no trivial (cuando $A^+ \neq 0$), sucede cuando:

$$\beta_{mn} d = l\pi \quad l = 1, 2, 3, \dots, \quad 7.35.$$

lo que implica que la longitud de la cavidad debe ser múltiplo entero de media longitud de onda guiada a la frecuencia de resonancia. Por lo tanto, la cavidad rectangular es la versión con guía de onda del resonador de línea de transmisión cortocircuitado de longitud $\lambda/2$. Si sustituimos el valor de β_{mn} obtenido en 7.35 en 7.33, resulta que el número de onda para una cavidad rectangular puede definirse como:

$$k^2 = k_c^2 + \beta^2 \Rightarrow k_{mnl} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{l\pi}{d} \right)^2} \quad 7.36.$$

Entonces podemos referirnos a los modos resonantes en la cavidad TE_{mnl} o TM_{mnl} , donde los índices m, n, l se refieren al número de variaciones en el diagrama de onda estacionaria en las

direcciones x , y , z respectivamente. La frecuencia de resonancia del modo TE_{mnl} o TM_{mnl} viene dada por:

$$f_{mnl} = \frac{ck_{mnl}}{2\pi\sqrt{\mu_r\epsilon_r}} = \frac{c}{2\pi\sqrt{\mu_r\epsilon_r}} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{d}\right)^2} \quad 7.37.$$

Si sucede que $b < a < d$, el modo dominante (el de menor frecuencia de resonancia) será el modo TE_{101} , correspondiente al modo dominante TE_{10} en guía de onda en una guía cortocircuitada de longitud $\lambda_g/2$. El modo TM dominante es el TM_{110} . Puede observarse que hay una triple infinidad de resonancias correspondiendo a diferentes modos de resonancia e incluso modos con subíndices distintos pueden resonar a la misma frecuencia si la relación de dimensiones guarda una relación determinada con la relación de subíndices. Este fenómeno, en el que configuraciones distintas resuenan a la misma frecuencia debido a las dimensiones geométricas, se conoce como modos resonantes degenerados. Puede comprobarse que en el caso de un resonador cúbico puede haber hasta 12 modos distintos resonando a la misma frecuencia. Este hecho debe ser normalmente eliminado por lo que se tiende a trabajar con el modo de resonancia fundamental TE_{101} , derivado del modo dominante de la guía rectangular.

Si tomamos la primera parte de la ecuación 7.36 y dividimos por el número de onda de corte asociado al modo TE_{10} ($k_{c10} = \pi/a$) resulta que:

$$\left(\frac{2af_0}{c}\right)^2 = \left(\frac{k_c}{k_{c10}}\right)^2 + l^2\left(\frac{a}{d}\right)^2 \quad 7.38.$$

Que es la ecuación de una familia de rectas de la forma $y=y_0+mx$ donde y es proporcional a f_0^2 , x varía como $(1/d)^2$ y los coeficientes y_0 y m dependen del modo de resonancia, una vez que se han fijado las dimensiones de la guía. La representación gráfica de la ecuación 7.38 es lo que constituye una carta de modos de la cavidad. En la gráfica de la figura 9 se ha representado dicha carta de modos para el caso en que $a=2b$. En el origen coincide con el diagrama de la frecuencia de corte de la guía correspondiente. Se puede ver cómo el modo más fácil de aislar es el modo TE_{101} para un margen importante de dimensiones y de frecuencias de resonancia.

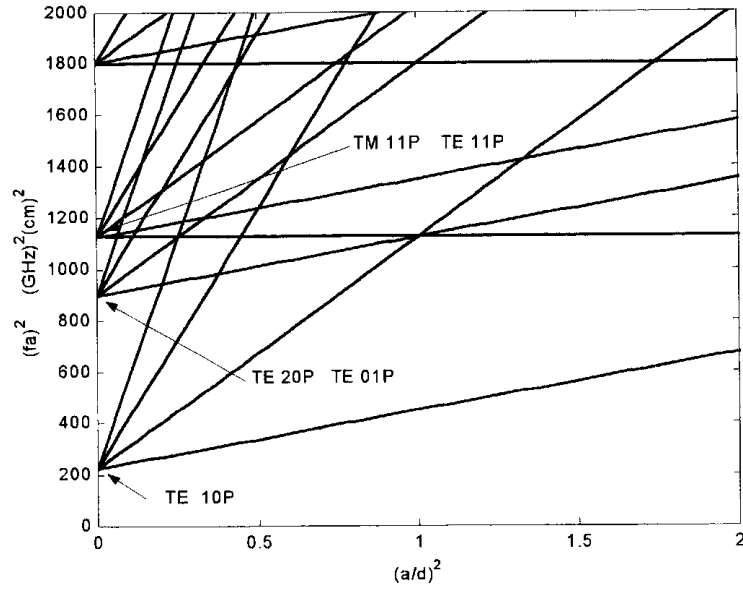


Figura 9: Carta de modos para una cavidad rectangular con $a=2b$

Q del modo TE_{10l}

Para el caso particular en que $m=1$, $n=0$, quedando l como parámetro, y teniendo en cuenta que $A^+ = -A^-$ obtenemos los siguientes campos:

$$\begin{aligned} E_y &= A^+ \sin \frac{\pi x}{a} [e^{-j\beta z} - e^{j\beta z}] \\ H_x &= \frac{-A^+}{Z_{TE}} \sin \frac{\pi x}{a} [e^{-j\beta z} + e^{j\beta z}] \\ H_z &= \frac{j\pi A^+}{k\eta a} \cos \frac{\pi x}{a} [e^{-j\beta z} - e^{j\beta z}] \end{aligned} \quad 7.39.$$

Si llamamos $E_0 = -2jA^+$, e imponiendo la solución para la constante de propagación en resonancia: $\beta_{mn}d = l\pi$, las expresiones se reducen a:

$$\begin{aligned} E_y &= E_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{l\pi z}{d} \\ H_x &= \frac{-jE_0}{Z_{TE}} \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{l\pi z}{d} \\ H_z &= \frac{j\pi E_0}{k\eta a} \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{l\pi z}{d} \end{aligned} \quad 7.40.$$

Podemos hallar la Q de este modo encontrando las energías almacenadas eléctrica y magnética, y la potencia perdida en las paredes conductoras y el dieléctrico, las dos fuentes de pérdidas. La energía eléctrica almacenada es:

$$W_e = \frac{\epsilon}{4} \int_V E_y E_y^* dv = \frac{\epsilon abd}{16} E_0^2 \quad 7.41.$$

mientras que la energía magnética almacenada es:

$$W_m = \frac{\mu}{4} \int_V (H_x H_x^* + H_z H_z^*) dv = \frac{\mu abd}{16} E_0^2 \left(\frac{1}{Z_{TE}^2} + \frac{\pi^2}{k^2 \eta^2 a^2} \right) \quad 7.42.$$

Como $Z_{TE} = k\eta / \beta$ y $\beta = \beta_{10} = \sqrt{k^2 - (\pi/a)^2}$, la cantidad entre paréntesis se reduce a:

$$\left(\frac{1}{Z_{TE}^2} + \frac{\pi^2}{k^2 \eta^2 a^2} \right) = \frac{\beta^2 + (\pi/a)^2}{k^2 \eta^2} = \frac{1}{\eta^2} = \frac{\epsilon}{\mu} \quad 7.43.$$

Gracias a este breve desarrollo, comprobamos de inmediato que $W_e = W_m$. Por lo tanto, las energías eléctrica y magnética almacenadas son iguales bajo la condición de resonancia, análogamente a los circuitos RLC resonantes mostrados con anterioridad.

Para pequeñas pérdidas podemos encontrar la potencia disipada en las paredes de la cavidad mediante el método de las perturbaciones. De este modo, la potencia perdida viene dada por:

$$P_c = \frac{R_s}{2} \int_{\text{paredes}} |H_t|^2 ds \quad 7.44.$$

donde $R_s = \sqrt{\omega\mu_0 / 2\sigma}$ es la resistencia superficial de las paredes metálicas, y H_t es el campo tangencial magnético en la superficie de las paredes. Introduciendo los campos descritos anteriormente en la expresión de la potencia disipada en las paredes conductoras, obtenemos:

$$\begin{aligned} P_c &= R_s \int_{y=0}^b \int_{x=0}^a |H_x(z=0)|^2 dx dy + R_s \int_{z=0}^d \int_{y=0}^b |H_z(x=0)|^2 dy dz \\ &\quad + R_s \int_{z=0}^d \int_{x=0}^a \left[|H_x(y=0)|^2 + |H_z(y=0)|^2 \right] dx dz \\ &= \frac{R_s E_0^2 \lambda^2}{8\eta^2} \left(\frac{l^2 ab}{d^2} + \frac{bd}{a^2} + \frac{l^2 a}{2d} + \frac{d}{2a} \right) \end{aligned} \quad 7.45.$$

Para el desarrollo de la expresión anterior se ha tenido en cuenta la simetría de la cavidad, además

de aplicar las relaciones: $\begin{cases} k = 2\pi / \lambda \\ Z_{TE} = k\eta / \beta = 2d\eta / l\lambda \end{cases}$

Entonces, podemos aplicar la expresión del factor de calidad de un resonador:

$$Q = \omega \frac{\text{energía media almacenada}}{\text{energía pérdida / sg}} = \omega \frac{W_m + W_e}{P_{\text{loss}}}$$

que en nuestro caso, para pérdidas debidas a las paredes, pero no al dieléctrico, y recordando $W_m = W_e$, se convierte en:

$$\begin{aligned} Q_c &= \frac{2\omega_0 W_e}{P_c} = \frac{k^3 abd\eta}{4\pi^2 R_s} \frac{1}{\left[\frac{l^2 ab}{d^2} + \frac{bd}{a^2} + \frac{l^2 a}{2d} + \frac{d}{2a} \right]} \\ &= \frac{(kad)^3 b\eta}{2\pi^2 R_s} \frac{1}{\left[(2l^2 a^3 b + 2bd^3 + l^2 a^3 d + ad^3) \right]} \end{aligned} \quad 7.46.$$

Para terminar, consideraremos el efecto de pérdidas en el dieléctrico que llena la cavidad. Un dieléctrico con pérdidas tiene una conductividad efectiva $\sigma = \omega\epsilon'' = \omega\epsilon_r\epsilon_0 \tan \delta$, donde $\epsilon = \epsilon' - j\epsilon'' = \epsilon_r\epsilon_0(1 - j \tan \delta)$, y $\tan \delta$ es la tangente de pérdidas del material. Entonces, recurriendo de nuevo a los fundamentos de teoría electromagnética, la potencia disipada en el dieléctrico es:

$$P_d = \frac{1}{2} \int_V \bar{J} \cdot \bar{E}^* dv = \frac{\omega\epsilon''}{2} \int_V |\bar{E}|^2 dv = \frac{abd\omega\epsilon'' |E_0|^2}{8} \quad 7.47.$$

Así, en este caso con pérdidas dieléctricas, pero paredes conductoras perfectas, el factor de calidad es:

$$Q_d = \frac{2\omega W_e}{P_d} = \frac{\epsilon'}{\epsilon''} = \frac{1}{\tan \delta} \quad 7.48.$$

Para el caso de existir tanto pérdidas en las paredes conductoras, como pérdidas debidas al dieléctrico, la potencia de pérdidas total es $P_c + P_d$. De este modo, la Q total es:

$$Q = \left(\frac{1}{Q_c} + \frac{1}{Q_d} \right)^{-1} \quad 7.49.$$

Cavidad resonante de guía de onda circular

Una cavidad resonante cilíndrica puede ser construida con una sección de guía de onda circular terminada por ambos extremos. Debido a que el modo dominante en la guía de onda circular es el modo TE_{11} , el modo dominante en una cavidad cilíndrica es el modo TE_{111} . Derivaremos las

frecuencias de resonancia para los modos de cavidades circulares TE_{nm} y TM_{nm} y la expresión para la Q del modo TE_{nm} .

Las cavidades circulares son frecuentemente usadas como medidores de frecuencia. La cavidad se construye con una pared móvil para permitir ajuste mecánico de la frecuencia de resonancia. La cavidad se acopla a una guía de onda mediante una pequeña apertura. Para la medición, debemos saber que la potencia será absorbida por la cavidad si se sintoniza con la frecuencia de operación del sistema; dicha absorción se puede monitorizar con un medidor de potencia. Se debe calibrar la cavidad para obtener el resultado. Debido a que la resolución en frecuencia viene determinada por la Q del resonador, el modo TE_{011} es frecuentemente usado para medidores de frecuencia dado que su Q es mucho mayor que la Q del modo dominante. La siguiente figura muestra la geometría de una cavidad resonante cilíndrica.

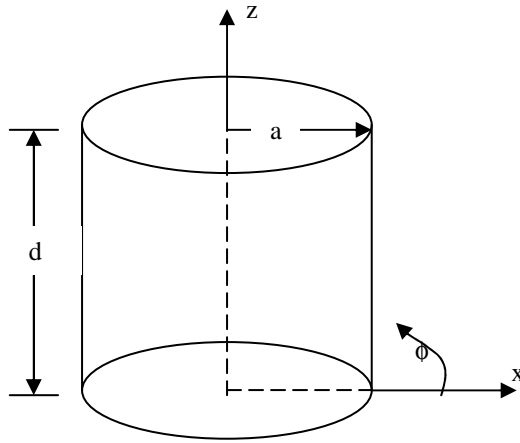


Figura 10: Esquema de una cavidad cilíndrica

Como en el caso de la cavidad rectangular, la solución se simplifica comenzando con los modos de guía de onda circular, los cuales se hallan satisfaciendo las condiciones de contorno necesarias en las paredes de la guía circular. Los campos transversales eléctricos (E_ρ, E_ϕ) de los modos TE_{nm} o TM_{nm} en guía circular pueden escribirse como:

$$\bar{E}_t(\rho, \phi, z) = \bar{e}(\rho, \phi) [A^+ e^{-j\beta_{nm}z} + A^- e^{j\beta_{nm}z}] \quad 7.50.$$

donde $\bar{e}(\rho, \phi)$ es la variación transversal del modo, y A^+ , A^- son amplitudes arbitrarias de las ondas progresivas en ambos sentidos. La constante de propagación del modo TE_{nm} es:

$$\beta_{nm} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\rho'_{nm}}{a}\right)^2} \quad 7.51.$$

mientras que la constante de propagación del modo TM_{nm} es:

$$\beta_{nm} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{p_{nm}}{a}\right)^2} \quad 7.52.$$

donde $k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$. Para obtener $\bar{E}_t = 0$ en $z = 0, d$ debe cumplirse que $A^+ = -A^-$, y

$A^+ \sin \beta_{nm} d = 0$ lo que equivale a la condición:

$$\beta_{nm} d = l\pi \quad \text{para } l = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad 7.53.$$

lo que implica que la longitud de la guía debe ser múltiplo entero de media longitud de onda guiada a la frecuencia de resonancia. Entonces, tenemos las siguientes frecuencias de resonancia:

$$\text{Modo } TE_{nml} \quad f_{nml} = \frac{c}{2\pi\sqrt{\mu_r\epsilon_r}} \sqrt{\left(\frac{p'_{nm}}{a}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{d}\right)^2} \quad 7.54.$$

$$\text{Modo } TM_{nml} \quad f_{nml} = \frac{c}{2\pi\sqrt{\mu_r\epsilon_r}} \sqrt{\left(\frac{p_{nm}}{a}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{d}\right)^2} \quad 7.55.$$

Como es fácil comprobar, el modo dominante TE es el modo TE_{111} , mientras que el modo dominante TM es el modo TM_{110} . La siguiente figura muestra un diagrama de modos para los órdenes más bajos en una cavidad cilíndrica. Este diagrama es muy útil para el diseño de cavidades resonantes, ya que muestra que modos pueden ser excitados a una determinada frecuencia, para un determinado tamaño de cavidad.

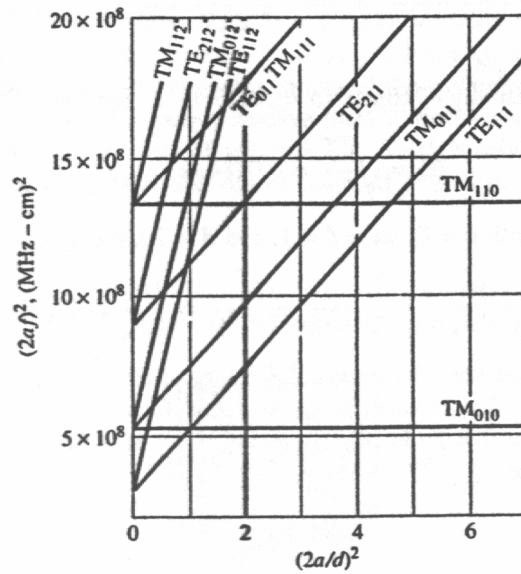


Figura 11: Carta de modos de una cavidad cilíndrica

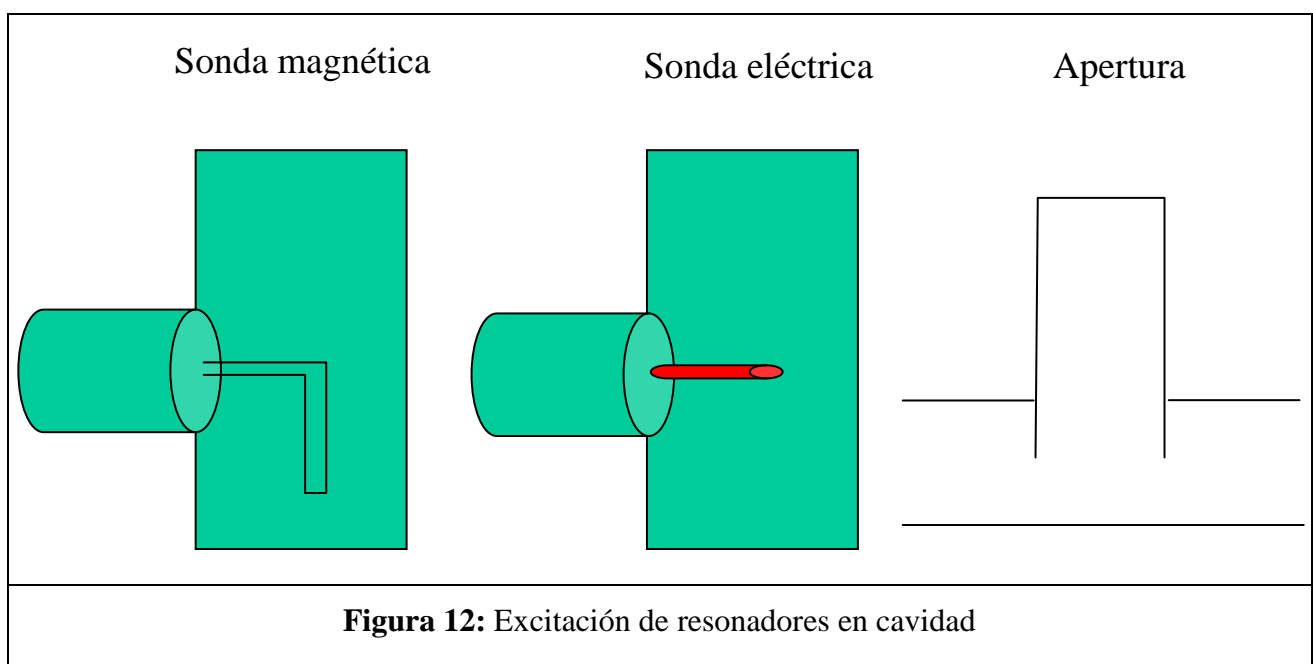
5. EXCITACIÓN DE RESONADORES

Como ya quedó expuesto en la introducción las cavidades nunca se encuentran aisladas sino que reciben energía del exterior y, a su vez, se puede extraer energía hacia el exterior de ellas. Es por ello que la descripción completa del comportamiento de un resonador tiene que considerar al mismo en función, bien de dipolo bien de cuádrupolo. Debido a la gran cantidad de circuitos resonantes que existen y las distintas formas de acoplamiento que hay, el proceso a seguir será explicar someramente, ya que el problema completo se saldría de los límites de estos apuntes, cómo se produce el acoplamiento entre distintas estructuras resonantes. Posteriormente se continuará con un modelo circuital genérico de cualquier resonador para dar las características de acoplamiento y de transmisión del mismo. Por último, se terminará con dos ejemplos concretos de estructuras resonante acopladas en transmisión o reflexión como puede ser un resonador en tecnología microstrip acoplado capacitivamente o una cavidad resonante acoplada mediante apertura o sonda.

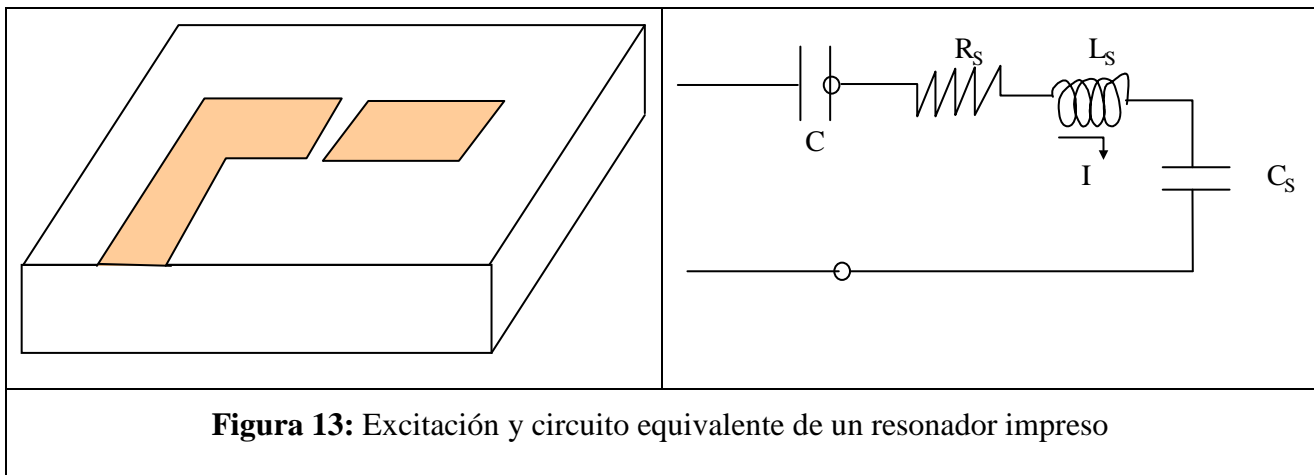
a) Excitación de resonadores

El objetivo que se busca en el diseño del acoplo es que se generen en la cavidad unos campos con una configuración lo más parecida posible al modo resonante buscado. Este acoplamiento es muy variado y se establece generalmente por medio de ventanas o de sondas. De esta forma podemos establecer:

- Aperturas localizadas en la pared común de la cavidad y la guía de forma que el modo en la guía tenga la misma forma que en la cavidad. En la figura se muestra la excitación de cavidades rectangulares y cilíndricas por medio de diafragmas verticales que originan respectivamente los modos TE_{101} y TM_{010}



- Bucles coaxiales: el bucle es perpendicular a la dirección del campo magnético en la cavidad.
- Terminales eléctricos: el acoplamiento se hace a través de una sonda capacitiva buscando el lugar donde el campo eléctrico es máximo. Por ello la sonda es paralela a la dirección del campo eléctrico y llega a la mitad de la cavidad, lugar donde el campo es máximo.
- En estructuras microstrip el acoplamiento se realiza por medio de un salto que acopla el resonador a la tira. La máxima transferencia de potencia entre el resonador y la línea de transmisión sucede cuando el resonador se encuentra adaptado a la línea a la frecuencia de resonancia.



b) Los resonadores como cuadripolos (resonadores en transmisión)

Imaginemos que ser parte de una cavidad acoplada por medio de dos pequeños diafragmas. El circuito equivalente del circuito aparece en la figura 6.** donde los diafragmas se han representado como transformadores perfectos a los que se han añadido pequeñas resistencias para incluir los efectos de la disipación en el acoplamiento y unas pequeñas reactancias propias de la discontinuidad y responsables de la pequeña variación de la frecuencia de resonancia. Se empezará considerando que las impedancias de carga y generador son reales y que, por consiguiente, la frecuencia de resonancia del sistema coincide con la del circuito RLC. En este caso el sistema generador, cavidad, carga es el representado en la figura 6.**.a junto con su equivalente en 6.**.b. De este último se desprende que la impedancia total serie del circuito será:

$$\begin{aligned}
 Z &= n_1^2 \cdot R_g + n_2^2 \cdot R_c + (R + j \cdot Q \cdot R \cdot \alpha) = \\
 R \cdot \left[1 + \frac{n_1^2 \cdot Z_o}{R} \cdot \frac{R_g}{Z_o} + \frac{n_2^2 \cdot Z_o}{R} \cdot \frac{R_c}{Z_o} + j \cdot Q \cdot \alpha \right] &= \\
 R \cdot \left[1 + s_1 \cdot \frac{R_g}{Z_o} + s_2 \cdot \frac{R_c}{Z_o} + j \cdot Q \cdot \alpha \right] &
 \end{aligned}
 \tag{7.56}$$

De donde se puede poner el factor de calidad cargado del circuito resonante como

$$Q_c = \frac{\omega_o \cdot L}{R \cdot \left[1 + s_1 \cdot \frac{R_g}{Z_o} + s_2 \cdot \frac{R_c}{Z_o} \right]} \Bigg|_{\text{adaptación}} = \frac{\omega_o \cdot L}{R \cdot [1 + s_1 + s_2]} = \frac{Q}{[1 + s_1 + s_2]} \quad 7.57.$$

Como aplicación hallemos el factor de transmisión (pérdidas de inserción) de la cavidad montada como cuadripolo. La potencia recibida por la carga vendrá dada por la siguiente expresión

$$P_c(\omega) = \frac{n_2^2 \cdot R_c \cdot n_1^2 \cdot V^2}{|Z(\omega)|^2} \quad 7.58.$$

Si se define el factor de transmisión como $T(\omega) = \frac{P_c(\omega)}{P_c(\omega_o)}$. Introduciendo en esta expresión las ** resulta que el factor de transmisión de la cavidad es:

$$T(\omega) = \frac{P_c(\omega)}{P_c(\omega_o)} = \frac{(1 + s_1 + s_2)^2}{(1 + s_1 + s_2)^2 + \alpha^2 \cdot Q_o^2} = \frac{1}{1 + \alpha^2 \cdot Q_c^2} \quad 7.59.$$

De acuerdo con la expresión anterior se puede definir los conceptos de anchura de banda y anchura de banda relativa de la cavidad montada en transmisión. Así el intervalo de frecuencias para el que se cumple $T(f) \geq \frac{1}{2 \cdot T(f_o)}$ ($Q_c^2 \cdot \alpha^2 \leq 1$) se denomina banda de paso; la amplitud de dicho intervalo

($\frac{f_o}{Q_c}$) es la anchura de banda mientras que $\frac{1}{Q_c}$ es la anchura de banda relativa. Como puede verse

estas expresiones son totalmente análogas a las obtenidas en la sección 1 sin más que cambiar el factor de calidad interno por el cargado.

Las expresiones anteriores demuestran que a medida que disminuyen los coeficientes de acoplamiento se hacen mayores las pérdidas de inserción debido que al estar muy poco acoplada la cavidad, esta actúa como aislador entre la entrada y la salida. De esta forma el Q_c tiende a igualarse al Q por lo que el circuito es mucho más selectivo.

c) Efecto de la reactancia de la carga en la frecuencia de resonancia

Cuando, a diferencia de lo supuesto en el apartado anterior, la carga no es puramente resistiva, su presencia modifica no sólo la agudeza de la resonancia sino también la frecuencia a que esta tiene lugar. Esta deriva de la frecuencia es pequeña cuando la Q de la cavidad es elevada pero su valor no puede despreciarse cuando la cavidad va a funcionar como ondámetro de precisión.

Si se considera el circuito de la figura 6.** la reactancia total que aparece en los terminales 1 viene dada como: $X = \left(\frac{1}{n_1^2} \right) \cdot \left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C} \right) + \left(\frac{n_2^2}{n_1^2} \right) \cdot X_c$, con X_c la reactancia de la carga. La resonancia del sistema cavidad+carga tendrá lugar cuando $X=0$, lo que supone la siguiente frecuencia de resonancia

$$\omega_r = -\frac{n_2^2 \cdot X_c}{2L} + \sqrt{\left(\frac{n_2^4 \cdot X_c^2}{4L^2} + \frac{1}{LC} \right)} \Bigg|_{X_c < \left(\frac{L}{C} \right)^{0.5}} = \omega_o - \frac{n_2^2 \cdot X_c}{2L} \quad 7.60.$$

$$\omega_r = \omega_o \cdot \left(1 - s_2 \frac{X_c}{2Q_o \cdot Z_o} \right)$$

Si aplica la expresión anterior a un caso normal de una cavidad con factor de calidad $Q=10^4$, factor de acoplamiento s_2 de 0.5, y relación $X_c/Z_o=1$, se obtiene el valor de $(f_r-f_o)/f_o$ de $2.5 \cdot 10^{-5}$ que da idea del orden de la deriva de la frecuencia de resonancia que suele encontrarse en la práctica.

De manera análoga se obtiene la frecuencia para la que se hace máxima la transmisión de potencia, ω_r del generador a la carga a través de la cavidad. En este caso interviene la reactancia del generador y de la carga resultando la siguiente expresión:

$$\omega_r = \omega_o \cdot \left(1 - s_1 \frac{X_g}{2Q_o \cdot Z_o} - s_2 \frac{X_c}{2Q_o \cdot Z_o} \right) \quad 7.61.$$

Las expresiones anteriores se han derivado a partir de la fijación de un determinado plano de referencia. Esta suposición no es cierta y la única magnitud que permanece invariable es la relación de onda estacionaria. Ahora bien lo único que se puede asegurar de una carga es que satisface la relación $\frac{X}{Z_o} \leq \frac{(r^2 - 1)}{2r}$ ¹. Introduciendo dicha desigualdad en las anteriores expresiones de los correspondientes desplazamientos de las frecuencias de resonancia resulta

$$\frac{\omega_r - \omega_o}{\omega_o} \leq \frac{s_2 \cdot (r_c^2 - 1)}{4 \cdot Q_o \cdot r_c^2} \quad 7.62.$$

¹ Esta desigualdad puede deducirse con ayuda de la carta de Smith que se ve en la siguiente figura:

En ella puede verse que un valor dado de la relación de onda estacionaria corresponde a una circunferencia cuyo coeficiente de reflexión es $|\Gamma| = \frac{SWR - 1}{SWR + 1}$. La zona rayada en dicha carta de Smith corresponde a los afijos de impedancia cuya reactancia relativa es inferior que un cierto valor $1/X$. Así se satisface la desigualdad anterior.

$$\frac{\omega_t - \omega_o}{\omega_o} \leq \left(\frac{1}{4Q_o} \right) \cdot \left(\frac{s_1 \cdot (r_g^2 - 1)}{r_g} + \frac{s_2 \cdot (r_c^2 - 1)}{r_c} \right) \quad 7.63.$$

Como resumen puede extraerse que el comportamiento de un resonador acoplado a uno o varios tramos de guía o línea, en las proximidades de la frecuencia de resonancia, puede describirse en función de los siguientes parámetros:

- Factor de calidad en vacío Q
- Coeficientes de acoplo entre las líneas y los resonadores: s_1, s_2, \dots
- La relación de onda estacionaria que presenta los diversos tramos de línea acoplados al resonador.

d) Resonadores como dipolos (resonadores montados a reflexión)

El circuito equivalente de un resonador puede ponerse como un circuito paralelo o como un circuito serie. Cada configuración puede convertirse a la otra sin más que hacer un desplazamiento de $\lambda/4$. Aunque el análisis para las dos configuraciones, serie o paralelo, es idéntico se realizará el análisis para la configuración paralelo. En este caso podemos recordar cuánto vale la impedancia y la admitancia vista a la entrada del circuito:

$$Z_{in}(\omega) = \frac{R}{1 + j \cdot \alpha \cdot Q}$$

$$Y_{in}(\omega) = G \cdot (1 + j \cdot Q \cdot \alpha)$$

Si se normaliza el valor del coeficiente de acoplamiento respecto a la impedancia característica de la línea externa resulta:

$$s = \frac{Q}{Q_{ex}} = \frac{G_{ex}}{G_p} = \frac{Y_o}{G_p} \bigg|_{Y_o=1} = \frac{1}{G_p}$$

De acuerdo con la anterior expresión se puede poner el factor de calidad cargado del circuito en función del factor de calidad descargado como

$$\frac{1}{Q_c} = \frac{1}{Q} + \frac{1}{Q_{ex1}} = \frac{1}{Q} + \frac{1}{G_p \cdot Q} \Rightarrow Q_c = \frac{G_p \cdot Q}{1 + G_p}$$

El lugar geométrico de las admitancias indicadas en la expresión ** puede representarse en la figura 6.** para una variación de la desintonía α . Puede verse que dependiendo de las condiciones del

acoplamiento variará la posición del círculo. Así si estamos en condiciones de acoplamiento crítico $G_p=1$ y la circunferencia pasará por el centro de la carta de Smith, si hay condiciones de subacoplamiento $G_p>1$ y la circunferencia de admitancia será interior a la $G_p=1$; por último si hay condiciones de supraacoplamiento resulta que $G_p<1$ y la circunferencia de admitancia será exterior a la unidad. Dichas circunferencias son representaciones de las admitancias en función de la variación de frecuencia. Interesaría tener, por tanto, una escala de representación en donde se indicara el valor de la admitancia en función del desplazamiento de frecuencia. Para ello a partir de la expresión del coeficiente de reflexión se tiene que

$$\Gamma = \frac{1-Y}{1+Y} \Rightarrow Y = \frac{1-\Gamma}{1+\Gamma} \Rightarrow 1+\Gamma = \frac{2}{1+Y} = \frac{2}{(1+G_p + j \cdot G_p \cdot Q \cdot \alpha)}$$

En la figura 6.** aparece representado el vector $1+\Gamma$. Se puede ver que la inclinación de dicho vector viene dada como

$$\text{tg}(\varphi) = \text{tg}(\arg(1+\Gamma)) = -\frac{G_p \cdot Q \cdot \alpha}{1+G_p}$$

De manera que proyectando los afijos de $Y(\alpha)$ sobre cualquier recta $\text{Re}(\Gamma) = \text{cte}$ se obtiene una escala lineal en la variable de desintonía y por lo tanto en la frecuencia. Esta propiedad permite deducir la frecuencia que corresponde a cualquier punto del círculo $Y(\alpha)$ si se conocen las que corresponden a dos puntos cualesquiera del mismo.

Con el fin de determinar esos dos puntos habrá que buscar otras nuevas curvas que intersequen a la curva de admitancias anterior. Antes de pasar a obtener esas curvas enunciaremos ciertas propiedades de la transformación anterior. En primer lugar hay que decir que es una transformación conforme donde se establecen las siguientes correspondencias:

- $Y=0 \Leftrightarrow \Gamma=1$
- $Y=1 \Leftrightarrow \Gamma=0$
- $Y=\infty \Leftrightarrow \Gamma=-1$
- $Y=\pm j \Leftrightarrow \Gamma=\mp j$
- $Y=-1 \Leftrightarrow \Gamma=\infty$

6. PROBLEMAS

PROBLEMA 1

Sea Q_0 el factor de calidad de una cavidad vacía en la frecuencia de resonancia f_0 de un modo cualquiera. Suponiendo que las pérdidas se presentan únicamente en las paredes conductoras, hállese la nueva frecuencia de resonancia f_{01} y el nuevo factor de calidad Q_{01} al llenar la cavidad de un dieléctrico con constante dieléctrica relativa ϵ_r .

PROBLEMA 2

Halle las posibles frecuencias de resonancia del circuito formado por dos líneas de transmisión sin pérdidas de longitud l , una de ellas cortocircuitada y la otra acabada en circuito abierto, conectadas en paralelo.

PROBLEMA 3

Se ha construido un resonador en $\lambda/2$ con un cable coaxial, con un radio interior de 1 mm y un radio exterior de 4 mm. Si la frecuencia de resonancia es 5 GHz, compare el factor de calidad para un dieléctrico interior de aire o de Teflon (con características eléctrica $\epsilon_r=2.08$ y $\tan \delta=0.0004$)

PROBLEMA 4

Se considera un resonador de media longitud de onda en tecnología microstrip acabado en circuito abierto. El espesor del sustrato es 1.59 mm, con $\epsilon_r=2.2$ y $\tan \delta=0.001$). Las tiras conductoras son de cobre. Determine la longitud de la línea para que exista una resonancia a 5 GHz así como el factor de calidad del resonador. Justifique las aproximaciones realizadas.

PROBLEMA 5

Diseñe una cavidad a partir de una guía rectangular de dimensiones 2×1 cm de forma que resuene con dieléctrico aire a una frecuencia de 10 GHz en el modo más bajo. Halle:

- La longitud de la cavidad y el factor de calidad.
- La cavidad se llena de un dieléctrico de constante dieléctrica relativa 4 y tangente de pérdidas 0.001. Halle la nueva frecuencia de resonancia y el nuevo factor de calidad.

PROBLEMA 6 (examen febrero 2001)

Se han hecho medidas para caracterizar un sustrato de espesor 0.625 mm a la frecuencia de 2 GHz. Para ello se ha construido un resonador en una línea stripline acabada en cortocircuito sobre el que se han hecho diversas medidas. De las mismas se ha obtenido que la permitividad relativa vale 4.2.

- a) Si a la primera frecuencia de resonancia el valor de la bobina del circuito equivalente debe ser de $L=4/\pi$ nH; determine la impedancia característica de la línea sobre la que ha construido el resonador.
- b) En condiciones de resonancia se ha medido una ROE de 4 y un factor de calidad de 300. Determine los valores del circuito equivalente del resonador construido explicando todos los pasos realizados y las aproximaciones realizadas.

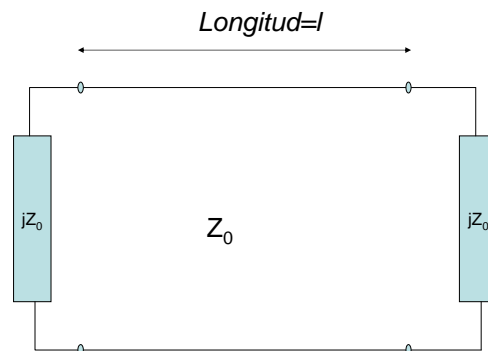
PROBLEMA 7

Se ha construido un resonador a partir de una línea microstrip de 50 ohm, que se acopla mediante un “gap” a una línea de alimentación microstrip de 50 ohm. El resonador tiene una longitud de 2.175 cm, una constante dieléctrica efectiva de 1.9 y una constante de atenuación cerca de resonancia de 0.01 dB/cm. Determine el valor de la capacidad de acoplamiento asociada al gap para conseguir un acoplamiento crítico; cuál es la frecuencia de resonancia resultante.

PROBLEMA 8 (examen septiembre 2003)

La línea de transmisión de la figura está cargada en sus extremos por reactancias jZ_0 a la frecuencia f_0 . Se pide:

- Encontrar la longitud mínima, l , para que el sistema resuene a f_0 (dificultad media-baja, 15 minutos)
- Dibuje la distribución de tensión y corriente en la línea si $l=5\lambda/4$ (fácil, 10 minutos)



PROBLEMA 9

Demuestre que para cualquier tipo de cavidad para cualquier modo de resonancia se cumple que

$\frac{1}{Q_0'} = \frac{1}{Q_0} + tg \delta$ siendo Q_0 el debido únicamente a las pérdidas en las paredes y $tg \delta$ las pérdidas en el dieléctrico.

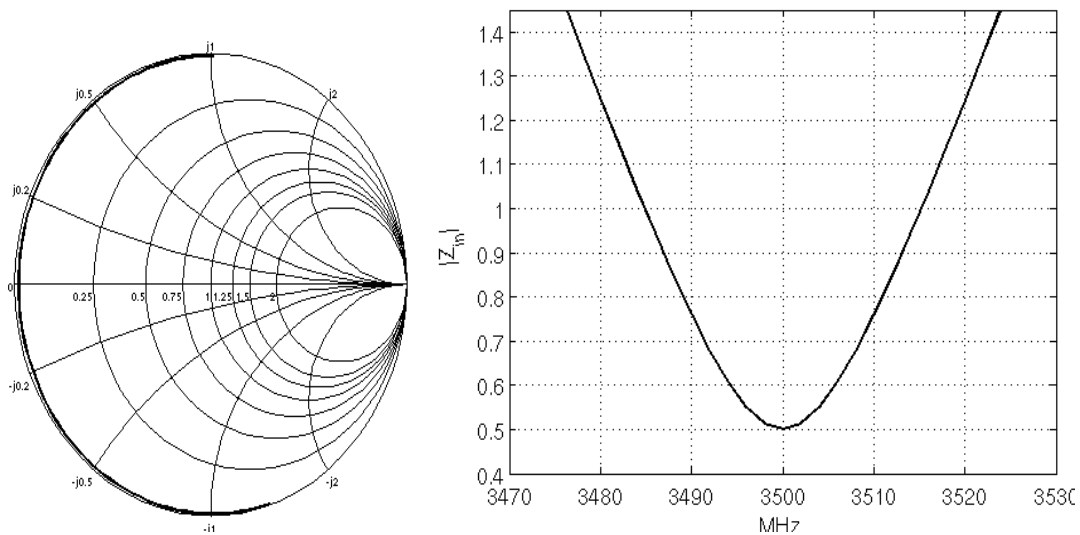
PROBLEMA 10

Una sección de guía de ondas resonante utilizada en transmisión presenta en carga un factor de sobretensión de 3000 y un ancho de línea 3dB en carga de 3.125MHz. Los coeficientes de acoplo a ambos lados son iguales y de valor 3.

- Calcule los parámetros característicos de esa cavidad como cuadripolo.
- Calcule el valor del factor de transmisión para una frecuencia de 9.37 GHz y para 0.5 GHz.
- ¿Cuáles serían las dimensiones de la sección y en qué material se podría hacer para que presente el factor de sobretensión especificado?

PROBLEMA 11 (septiembre 08)

Se dispone de un resonador de microondas, sobre el que se efectúan medidas en reflexión. Los resultados se muestran a continuación, en forma del coeficiente de reflexión respecto a la impedancia de referencia del analizador, 50Ω , y del módulo de impedancia de entrada en función de la frecuencia (que, por supuesto, no depende de las condiciones de medida).



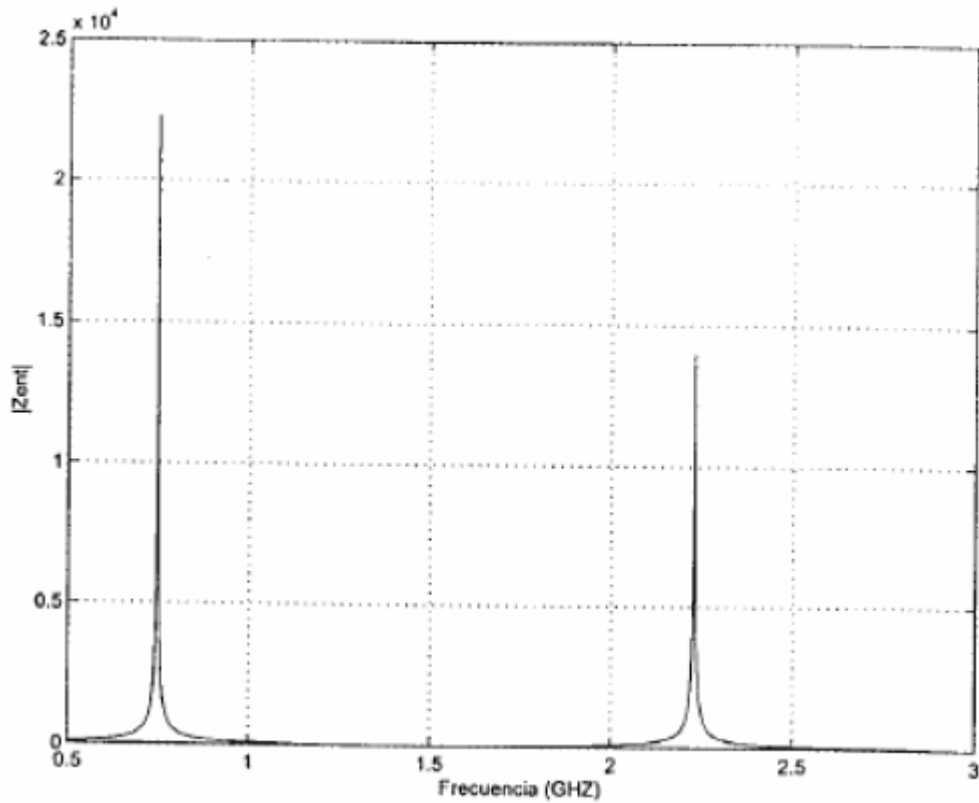
Responda razonadamente a las cuestiones siguientes.

- Indique la frecuencia de resonancia y el tipo de resonador y de acoplamiento.
- Determine el factor de calidad intrínseco (Q_0) del resonador.
- Determine los factores de calidad externo (Q_{ex}) y cargado (Q_L) del resonador en las condiciones de medida.
- Por algún motivo, el resonador se degrada y se incrementan sus pérdidas, de modo que su factor de calidad intrínseco se reduce a la mitad pero no hay más cambios. Represente las nuevas medidas de módulo de impedancia de entrada y coeficiente de reflexión en las gráficas anteriores.

PROBLEMA 12 (febrero 2006)

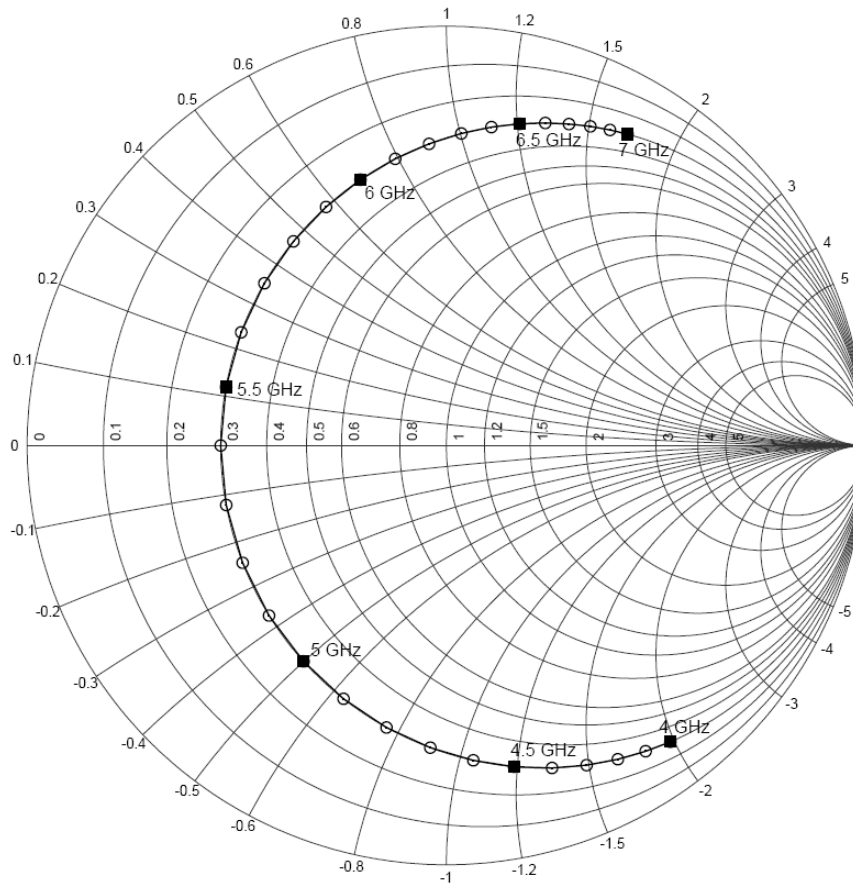
Se ha medido el módulo de la impedancia de entrada de una línea de transmisión de l (mm) de longitud, rellena de aire y acabada en cortocircuito (ver figura). Se pide:

- Determine de forma razonada la frecuencia o frecuencias de resonancia que presenta la línea en el margen de frecuencias indicado en la figura.
- Determine el valor de l
- Dicha línea se conecta a un circuito exterior del que se ha medido su resistencia en resonancia resultando un valor de 10^4 . Justifique si la línea resonante se encuentra subacoplada, sobreacoplada o presenta un acoplamiento crítico con el circuito exterior.



PROBLEMA 13

Se ha medido el coeficiente de reflexión a la entrada de cierto resonador, para un rango de frecuencias entre 4 y 7 GHz, en pasos de 0,1 GHz. El resultado se presenta en el siguiente diagrama de Smith (de impedancias):



Determinar razonadamente:

- 1) El tipo de resonancia que se produce en el rango de frecuencias medido, y su frecuencia de resonancia.
- 2) El ancho de banda absoluto y relativo a 3 dB.
- 3) El tipo de acoplamiento, y su coeficiente de acoplamiento.
- 4) El factor de calidad intrínseco del resonador.
- 5) Por último, el factor de calidad cargado y el factor de calidad de la red externa.